



NETRADIČNÍ ÚLOHY

Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA

Oddělení mezinárodních výzkumů

Praha 2006

Tato publikace byla vydána jako plánovaný výstup projektu 1P05ME774 programu KONTAKT financovaného z prostředků MŠMT ČR.

© Oddělení mezinárodních výzkumů, 2006

© Ústav pro informace ve vzdělávání, 2006

ISBN 80-211-0522-4

OBSAH

Úvod	5
1. Matematická gramotnost ve výzkumu PISA	7
1.1 Jak rozumět pojmu „matematická gramotnost“	7
1.2 Matematizace	7
1.3 Škála matematické gramotnosti a výsledky žáků	9
2. Struktura matematické gramotnosti a úlohy určené k jejímu hodnocení	11
2.1 Složky matematické gramotnosti	11
2.1.1 Situace a kontexty	11
2.1.2 Matematický obsah: čtyři tematické okruhy	12
2.1.3 Matematické dovednosti: tři třídy kompetencí	16
2.2 Formální podoba testových úloh	18
2.2.1 Typy otázek	18
2.2.2 Vyhodnocování žakovských odpovědí	19
3. Úlohy použité v hlavním šetření – kvantita	21
Úloha 1: Směnný kurz	21
Úloha 2: Knihovnička	24
Úloha 3: Menu	25
Úloha 4: Skateboard	26
Úloha 5: Schodiště	29
4. Úlohy použité v hlavním šetření – prostor a tvar	30
Úloha 1: Kostky	30
Úloha 2: Tesař	32
Úloha 3: Schodiště	33
Úloha 4: Hrací kostky	34
5. Úlohy použité v hlavním šetření – změna a vztahy	36
Úloha 1: Chůze	36
Úloha 2: Výška lidí	39
Úloha 3: Chat po internetu	42
Úloha 4: Nejlepší auto	44
6. Úlohy použité v hlavním šetření – neurčitost	46
Úloha 1: Loupeže	46
Úloha 2: Vývoz	49

Úloha 3: Barevné bonbony	51
Úloha 4: Test z fyziky	52
Úloha 5: Odpadky	53
Úloha 6: Zemětřesení	54
Úloha 7: Výsledky testu	55
Úloha 8: Prezidentské volby	57
7. Úlohy z pilotáže	58
Úloha 1: Matějská pouť	58
Úloha 2: Dětské boty	59
Úloha 3: Turnaj ve stolním tenise	60
Úloha 4: Snižování množství CO ₂	61
Úloha 5: Kosmický let	64
Literatura	65

ÚVOD

Mezinárodní výzkum PISA

V uplynulých letech se v České republice uskutečnila tři šetření mezinárodního projektu *PISA* (*Programme for International Student Assessment*) zaměřená na zjišťování vědomostí a dovedností patnáctiletých žáků ve čtení (toto šetření proběhlo v roce 2000), matematice (2003) a přírodních vědách (2006). Projekt probíhá pod patronací Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj (OECD) a v současné době je pravděpodobně nejvýznamnějším projektem v oblasti hodnocení výsledků vzdělávání. Kromě členských zemí OECD se do něj zapojila také řada dalších zemí z celého světa.

Na rozdíl od jiných podobných výzkumů nevychází PISA z učebních osnov zúčastněných zemí, ale z rámcových koncepcí hodnocených oblastí. Rámcové koncepce kladou důraz především na ty aspekty školního učiva, které budou dnešní patnáctiletí žáci potřebovat pro své budoucí uplatnění v osobním, profesním i občanském životě. Vyzdvihují *funkční užívání znalostí* a velkou pozornost věnují rozpracování *klíčových dovedností*. Aby se zdůraznila vazba na praktické využívání vědomostí a dovedností, byly jednotlivé oblasti výzkumu PISA nazvány *čtenářská, matematická a přírodovědná gramotnost*.

Kromě výsledků žáků v mezinárodním srovnání tedy výzkum PISA přináší i nový pohled na hlavní vzdělávací oblasti a v neposlední řadě také nové typy testových úloh. V tomto smyslu se může stát nejen zdrojem informací pro odborníky zabývající se hodnocením vzdělávacích výsledků, ale též inspirací pro širokou pedagogickou veřejnost. V této publikaci bychom chtěli čtenáře seznámit s koncepcí matematické gramotnosti a představit příklady úloh, které byly použity k jejímu hodnocení. Navazujeme tak na naše tři předchozí knihy z ediční řady *Netradiční úlohy* věnované oblastem čtenářské gramotnosti, přírodovědné gramotnosti a řešení problémových úloh.

Struktura publikace

První kapitola seznamuje s pojetím matematické gramotnosti ve výzkumu PISA 2003 a přináší základní informace o výsledcích žáků v této oblasti.

Druhá kapitola popisuje, jak byla oblast matematické gramotnosti strukturována a jaké typy úloh byly použity k jejímu hodnocení.

V kapitolách 3, 4, 5 a 6 přinášíme postupně uvolněné úlohy použité pro měření úrovně matematické gramotnosti v rámci hlavního šetření v roce 2003. Každá úloha je uvedena v plném znění a je doplněna návodem na vyhodnocování žákovských odpovědí. Pro každou úlohu také uvádíme její obtížnost a úspěšnost žáků při řešení. Úlohy jsou do kapitol členěny podle obsahu.

Poslední kapitola obsahuje úlohy, které byly rovněž navrženy pro výzkum PISA, při jejich ověřování v rámci pilotního šetření se však ukázalo, že nesplňují všechna předepsaná kritéria, a proto nebyly zařazeny do hlavního šetření.

V závěru publikace uvádíme přehled literatury, která se týká výzkumu PISA.





1. MATEMATICKÁ GRAMOTNOST VE VÝZKUMU PISA

1.1 Jak rozumět pojmu „matematická gramotnost“

Hodnocení matematické gramotnosti ve výzkumu PISA se zaměřuje na posouzení toho, nakolik jsou patnáctiletí žáci (tedy žáci ve věku, kdy většinou končí své povinné matematické vzdělávání) schopni používat matematiku k řešení rozmanitých situací z každodenního života. K takovým situacím patří například placení účtů, vybírání nejvýhodnějších nabídek na trhu, interpretování informací z tabulek nebo grafů, posuzování výsledků statistických šetření apod. Jejich úspěšné řešení předpokládá znalost matematické terminologie, faktů a postupů i dovednost provádět matematické operace, ale právě proto, že se zpravidla jedná o úkoly, v nichž není matematický obsah ihned patrný, vyžadují rovněž tvořivé kombinování jednotlivých prvků matematického učiva v závislosti na požadavcích konkrétní situace.

Pro potřeby výzkumu byla matematická gramotnost definována jako *schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.*

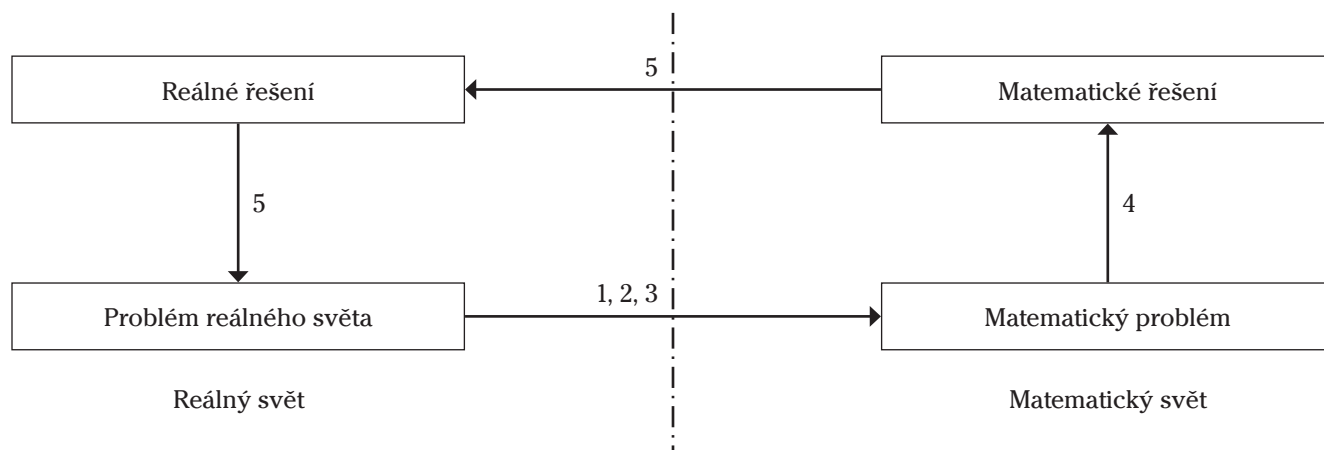
1.2 Matematizace

Základní proces, který žáci uplatňují při řešení problémů z reálného života, se nazývá *matematizace*. Proces matematizace můžeme rozdělit do pěti kroků:

1. Přistoupení k problému situovanému do reality.
2. Uspořádání problému s využitím matematických pojmů a určení jeho matematické podstaty.
3. Postupné vylučování reálných prvků problému při formulování předpokladů o jeho podstatě, zobecňování a formalizování; převedení reálného problému na problém matematický.
4. Řešení matematického problému.
5. Posouzení smysluplnosti matematického řešení s ohledem na reálnou situaci a určení mezí jeho platnosti.

Jednotlivé kroky procesu matematizace jsou znázorněny na obrázku 1.1.

Obrázek 1.1 Cyklus matematizace



K posouzení toho, zda žáci umějí používat své matematické vzdělání k řešení reálných životních situací, by v ideálním případě bylo potřeba shromáždit informace o jejich schopnosti *matematizovat* rozmanité typy úkolů, s nimiž se mohou v životě setkat. To je však z časových důvodů prakticky nemožné. Namísto toho byly pro test výzkumu PISA vyvinuty úlohy, které se snažily pokrýt různé kroky procesu matematizace i různé úrovně jejich ovládnutí. Díky tomu bylo možné sledovat velký rozsah dovedností žáků v různých kontextech. Celkový výsledek žáků v testu pak ukazuje, jak vyspělé matematické uvažování žáci mají a jak složité situace jsou schopni matematicky interpretovat a řešit.

Tabulka 1.1 Výsledky patnáctiletých žáků v oblasti matematické gramotnosti PISA 2003

Země	Průměrný výsledek			Rozdíl Ch – D
	Celkem	Chlapci	Dívky	
<i>Hongkong</i>	▲ 550	552	548	4
Finsko	▲ 544	548	541	7
Korejská republika	▲ 542	552	528	23
Nizozemsko	▲ 538	540	535	5
<i>Lichtenštejnsko</i>	▲ 536	550	521	29
Japonsko	▲ 534	539	530	8
Kanada	▲ 532	541	530	11
Belgie	▲ 529	533	525	8
<i>Macao</i>	▲ 527	538	517	21
Švýcarsko	▲ 527	535	518	17
Austrálie	▲ 524	527	522	5
Nový Zéland	▲ 523	531	516	14
Česká republika	▲ 516	524	509	15
Island	▲ 515	508	523	-15
Dánsko	▲ 514	523	506	17
Francie	▲ 511	515	507	9
Švédsko	▲ 509	512	506	7
Rakousko	506	509	502	8
Německo	503	508	499	9
Irsko	503	510	495	15
Slovensko	498	507	489	19
Norsko	▼ 495	498	492	6
Lucembursko	▼ 493	502	485	17
Polsko	▼ 490	493	487	6
Maďarsko	▼ 490	494	486	8
Španělsko	▼ 485	490	481	9
<i>Lotyšsko</i>	▼ 483	485	482	3
USA	▼ 483	486	480	6
<i>Rusko</i>	▼ 468	473	463	10
Portugalsko	▼ 466	472	460	12
Itálie	▼ 466	475	457	18
Řecko	▼ 445	455	436	19
<i>Srbsko</i>	▼ 437	437	436	1
Turecko	▼ 423	430	415	15
<i>Uruguay</i>	▼ 422	428	416	12
<i>Thajsko</i>	▼ 417	415	419	-4
Mexiko	▼ 385	391	380	11
<i>Indonésie</i>	▼ 360	362	358	3
<i>Tunisko</i>	▼ 359	365	353	12
<i>Brazílie</i>	▼ 356	365	348	16
Průměr zemí OECD	500	506	494	11

▲ Výsledek země je statisticky významně vyšší než průměr OECD.

▼ Výsledek země je statisticky významně nižší než průměr OECD.

Země vyznačené kurzivou nejsou členy OECD.

Tučně vyznačené rozdíly mezi chlapci a dívkami jsou statisticky významné.



1.3 Škála matematické gramotnosti a výsledky žáků

K prezentaci výsledků v oblasti matematické gramotnosti byla vytvořena mezinárodní škála navržená tak, aby průměr zemí OECD činil 500 a směrodatná odchylka 100. Znamená to, že přibližně dvě třetiny žáků členských zemí OECD mají skóry mezi 400 a 600 body. Průměrné bodové výsledky všech zúčastněných zemí uvádíme v tabulce 1.1.

Česká republika dosáhla nadprůměrných výsledků a umístila se na 13. místě z 40 zemí.¹ Statisticky významně lepší výsledek než Česká republika mělo sedm zemí a výsledky srovnatelné s námi dvanáct zemí. V tabulce jsou dále znázorněny rozdíly mezi průměrnými bodovými skóry chlapců a dívek. Ve většině zemí dosáhli chlapci lepších výsledků než dívky, pouze na Islandu tomu bylo naopak. Česká republika patří k zemím, kde jsou rozdíly mezi žáky obou pohlaví nadprůměrné. Z tabulky je také vidět, že některé země (Hongkong, Nizozemsko, Japonsko) měly nejen výborné celkové výsledky, ale také minimální rozdíly mezi chlapci a dívkami.

Úrovně způsobilosti

Škála matematické gramotnosti byla dále rozdělena do šesti úrovní nazvaných úrovně způsobilosti. Ty vyjadřují, jak rozvinuté matematické dovednosti žáci mají a s jak obtížnými úlohami si dokáží poradit. Úroveň matematické gramotnosti žáků i úroveň obtížnosti úloh je tedy možné vyjádřit bodovými hodnotami na téže škále. Kompetence žáků charakteristické pro jednotlivé úrovně jsou shrnuty v tabulce 1.2. Předpokládá se, že žáci na vyšších úrovních způsobilosti jsou vybaveni dovednostmi charakterizujícími jejich vlastní úroveň i dovednostmi z úrovní nižších.

Tabulka 1.2 Stručný popis úrovní způsobilosti

Úroveň	Rozmezí bodů	Kompetence žáků
6	více než 669	Žáci na této úrovni mají rozvinuté matematické myšlení a umějí aplikovat své porozumění a vzhled na nové situace, vytvářejí nové strategie. Jsou schopni zobecňovat a používat informace vycházející z jejich vlastních modelů a dokážou formulovat a přesně popsat své postupy a úvahy.
5	607 až 669	Žáci dokážou určit omezující podmínky, formulovat hypotézy, posoudit různé strategie řešení a postupovat podle nich. Jsou schopni přemýšlet o svých postupech a vysvětlit své úvahy a závěry.
4	545 až 606	Žáci jsou schopni pracovat s definovanými modely, propojovat různé matematické reprezentace a uvádět je do souvislostí. Umějí vysvětlit své úvahy a postupy.
3	483 až 544	Žáci jsou schopni provádět jasně popsané postupy vyžadující řadu rozhodnutí, používat různé zdroje informací a vyvozovat přímé závěry. Svě úvahy a závěry umějí stručně popsat.
2	421 až 482	Žáci jsou schopni rozpoznat matematické situace, vyhledat informace z jednoho zdroje a pracovat s jedním typem reprezentace. Dokážou vyvozovat přímé závěry a doslovně interpretovat výsledky.
1	358 až 420	Žáci jsou schopni provádět rutinní postupy a řešit úlohy ze známého kontextu obsahující všechny potřebné informace a otázky.

¹ Výzkumu se zúčastnilo celkem 41 zemí, ale Velká Británie nebyla z důvodu nedostatečné reprezentativnosti vzorku testovaných žáků zařazena do mezinárodního srovnání.



Za základní úroveň matematické gramotnosti byla zvolena úroveň 2. Žáci, kteří dosáhli alespoň druhé úrovně, dokáží používat matematiku k řešení situací z reálného života. Úlohy na první úrovni nespádají do rámce matematické gramotnosti ve smyslu výzkumu PISA, protože vyžadují pouze aplikaci jednoduchých znalostí v kontextech, které žáci dobře znají ze školního prostředí. Žáci, kteří jsou schopni řešit pouze tyto úlohy nebo ani ty ne, budou mít pravděpodobně problémy se zvládnutím běžných životních situací vyžadujících jistou míru matematizace. V České republice je těchto žáků 17 %. Zemí s nejnižším podílem žáků, kteří nedosáhli druhé úrovně způsobilosti, je Finsko (7 %).

2. STRUKTURA MATEMATICKÉ GRAMOTNOSTI A ÚLOHY URČENÉ K JEJÍMU HODNOCENÍ

2.1 Složky matematické gramotnosti

Pro vypracování souboru testových úloh bylo třeba oblast matematické gramotnosti podrobněji strukturovat. Obecná charakteristika oblasti a její definice jsou sice dobrými ideovými východisky, nemohou se však stát základem pro tvorbu konkrétních úloh. Matematická gramotnost byla proto, stejně jako gramotnost čtenářská a přírodovědná, rozdělena na tři hlavní složky:

- *situace a kontexty*, do nichž jsou úlohy zasazeny,
- matematický *obsah* neboli vědomosti,
- matematické *dovednosti*, označované též jako postupy nebo kompetence.

Je třeba zdůraznit, že jednotlivé složky matematické gramotnosti mají různou povahu. Zatímco situace a kontexty představují oblasti problémů reálného světa a matematický obsah je tvořen strukturami a pojmy, které lze využít při formulování matematické podstaty těchto problémů, vlastním jádrem matematické gramotnosti jsou dovednosti. Žáci budou schopni řešit dané problémy jen tehdy, budou-li vybaveni příslušnými kompetencemi. I zdánlivě jednoduchá úloha vyžadující pouze aplikaci základních dovedností může být ovšem pro žáka náročná, pokud je zasazena do neobvyklého kontextu nebo pokud vyžaduje specifické vědomosti, které žák nemá dostatečně zažit.

Každá složka matematické gramotnosti byla rozdělena do několika kategorií a při tvorbě úloh se dbalo na to, aby byly všechny kategorie v testu zastoupeny pokud možno rovnoměrně. Vznikl tak pestrý soubor testových úloh pokrývajících různé typy životních situací, různá obsahová témata matematiky a různé kompetence.

2.1.1 Situace a kontexty

Pro potřeby výzkumu PISA byly zvoleny čtyři typy situací, charakterizované rostoucí vzdáleností od každodenních zkušeností žáků:

- *osobní*,
- *vzdělávací/pracovní*,
- *veřejné*,
- *vědecké*.

Tabulka 2.1 Rozdělení matematických testových otázek podle typu situace

Situace	Počet otázek	%
Osobní	18	21
Vzdělávací	15	18
Pracovní	5	6
Veřejná	29	34
Vědecká	18	21
Celkem	85	100

Do kategorie vědeckých situací patří i úlohy týkající se pouze matematických objektů. Pro hodnocení matematické gramotnosti byly však vybírány spíše úlohy s nematematickým kontextem, které mají blíže k problémům každodenního života. V tabulce 2.1 uvádíme, jak byly jednotlivé typy situací zastoupeny v souboru matematických testových otázek výzkumu PISA 2003.

Při navrhování úloh pro výzkum PISA byla důležitým kritériem *autenticita* jejich kontextů. Preferovány byly úlohy zasazené do takových situací, v nichž by se i v reálném životě využila matematika. Tím se úlohy výzkumu PISA odlišují od většiny úloh ze školních učebnic, jejichž hlavním cílem je procvičování učiva a nikoli používání matematiky k řešení skutečných problémů.

2.1.2 Matematický obsah: čtyři tematické okruhy

Školní osnovy matematiky jsou logicky členěny podle obsahových hesel (např. aritmetika, algebra, geometrie), která odpovídají historicky vzniklým oborům matematického myšlení. Každodenní problémy, v nichž lze uplatnit matematické znalosti a dovednosti, však nebývají tak logicky uspořádány a k jejich řešení málokdy stačí aplikovat znalosti z jediného obsahového hesla. Ve výzkumu PISA byl proto matematický obsah rozdělen do čtyř širších tematických okruhů, které lépe odrážejí jevy reálného světa. Byly zvoleny tyto tematické okruhy:

- *kvantita*,
- *prostor a tvar*,
- *změna a vztahy*,
- *neurčitost*.

Každý tematický okruh obsahuje soubor jevů a pojmů, které jsou smysluplné a se kterými se lze setkat v mnoha různých situacích. Takovéto uspořádání matematického učiva žákům umožňuje důkladněji porozumět dané problematice, lépe pracovat s matematickými pojmy a pochopit jejich význam v reálném světě. Zvolené tematické okruhy zároveň pokrývají matematické učivo, o němž lze předpokládat, že je žáci probrali.

Tabulka 2.2 uvádí, jak byly jednotlivé tematické okruhy zastoupeny ve výzkumu PISA 2003. Z tabulky je patrné, že na každý tematický okruh připadala přibližně jedna čtvrtina testových otázek.

Tabulka 2.2 Rozdělení matematických testových otázek podle tematických okruhů

Tematický okruh	Počet otázek	%
Kvantita	23	27
Prostor a tvar	20	23,5
Změna a vztahy	22	26
Neurčitost	20	23,5
Celkem	85	100

Popis tematických okruhů

Kvantita

Tematický okruh kvantita se zaměřuje na uspořádání světa prostřednictvím kvantifikace. K jeho významným aspektům patří chápání relativní velikosti, rozpoznávání číselných struktur, používání



čísel k vyjadřování kvantifikovatelných vlastností reálného světa (počty, míry) a práce s čísly reprezentovanými různými způsoby. Součástí tematického okruhu kvantita je dále cit pro velikost čísel a odhadování. Pro posouzení věrohodnosti numerických výsledků musí mít žáci široké znalosti kvantit reálného světa (například vědět, jaká je průměrná rychlost auta, jak vysoká je věž nebo kolik žije na světě lidí). Do tohoto tematického okruhu náleží i schopnost efektivně provádět operace obsahující porovnávání, poměry a procenta.

Prostor a tvar

Tvar je důležité matematické téma se silnou vazbou k tradiční geometrii. Přesahuje ji však obsahem, významem i metodami. Zacházení s reálnými tvary vyžaduje porozumění základním prostorovým vlastnostem předmětů a jejich vzájemné poloze, orientaci v prostoru a interpretaci vizuálních informací. Součástí tohoto tematického okruhu je i chápání vztahů mezi reálnými tvary a jejich zobrazeními, zobrazování trojrozměrných objektů v rovině či vytváření dvojrozměrných sítí trojrozměrných těles a naopak. Žáci by si měli také uvědomovat přednosti a meze různých zobrazení trojrozměrných útvarů.

Změna a vztahy

Součástí tohoto tematického okruhu jsou matematické funkce, jimiž lze popsat nebo modelovat vztahy mezi jevy kolem nás. Žáci by měli znát pojmy lineární růst, exponenciální růst a periodický růst a základní rozdíly mezi nimi. Měli by mít povědomí o rychlosti změny, její strmosti (gradientu) a o závislosti jedné proměnné na jiných. Změny a vztahy lze vyjádřit nejrůznějšími způsoby (symbolicky, algebraicky, graficky, tabulkou), zásadní význam má proto také používání různých vyjádření k různým účelům a převody mezi nimi.

Neurčitost

Tento tematický okruh zahrnuje dvě příbuzná témata, „data“ a „náhoda“, která spadají do statistiky a počtu pravděpodobnosti. Do výzkumu PISA byl tento okruh zařazen proto, že podle odborníků zabývajících se výukou matematiky patří základní znalosti a dovednosti ze statistiky a pravděpodobnosti ke kompetencím potřebným pro život v současné společnosti a ve školních osnovách by měly dostat mnohem větší prostor než v minulosti. Ke specifickým pojmům a činnostem tohoto okruhu patří sběr a analýza dat, prezentace dat, pravděpodobnost a její kvantifikace, vysvětlování náhodnosti a vyvozování závěrů. Hlavní důraz by neměl být kladen na pouhou analýzu dat, ale na kritické posuzování dat, jejich vypovídací hodnoty a na interpretaci dat podle jejich kontextu.

Výsledky žáků podle tematických okruhů

Při zpracování výsledků výzkumu PISA byly pro tematické okruhy vytvořeny dílčí škály umožňující porovnání kompetencí žáků v různých obsahových oblastech matematiky. Jejich mezinárodní průměr byl opět 500 a směrodatná odchylka 100. Také tyto škály byly rozděleny na šest úrovní způsobilosti, jejichž popis uvádíme v tabulce 2.3. Z tabulky je zřejmé, že v rámci každé obsahové oblasti je možné sledovat různé typy dovedností i různé úrovně jejich osvojení. Za základní úroveň byla stejně jako v případě celkové škály zvolena úroveň 2.

Tabulka 2.3 Popis úrovní způsobilosti na dílčích škálách podle tematických okruhů**a) Kvantita**

Úroveň	Kompetence žáků
6	Žáci jsou schopni pracovat s pojmy a s modely složitých matematických postupů a vztahů. Umějí pracovat s formálními a symbolickými výrazy a používají postupy obsahující řadu kroků. Používají rozvinuté způsoby uvažování, dokážou propojit několik kontextů a sami navrhnou strategie řešení problémů. Jsou schopni formulovat své závěry, argumenty a přesná vysvětlení.
5	Žáci jsou schopni pracovat s modely složitějších situací z reálného světa, které vyžadují velkou míru matematizace. Používají různé strategie řešení problémů, mají rozvinuté způsoby uvažování, vhléd a dokážou interpretovat různé matematické reprezentace. Provádějí postupy, které obsahují řadu postupných kroků, a jsou schopni popsat své úvahy a argumenty.
4	Žáci jsou schopni pracovat s jednoduchými modely složitých situací, používat různé způsoby uvažování v nejrůznějších kontextech, interpretovat různé matematické reprezentace téže situace, analyzovat kvantitativní vztahy a uplatňovat je při řešení problémů. Ovládají řadu výpočetních dovedností.
3	Žáci používají jednoduché strategie řešení problémů ve známých kontextech. Dokážou analyzovat tabulky a vyhledat v nich příslušné informace. Jsou schopni převádět jednotky a provádět jasně popsané výpočty včetně těch, které obsahují několik kroků.
2	Žáci jsou schopni analyzovat jednoduché tabulky a vyhledat v nich příslušné informace. Dokážou provádět základní aritmetické výpočty a pracovat s jednoduchými kvantitativními vztahy (např. vztah přímé úměrnosti).
1	Žáci jsou schopni řešit jen nejzákladnější úlohy, ve kterých jsou všechny potřebné informace výslovně uvedeny a jejichž rozsah je velmi omezený. Zvládají pouze základní matematické úkoly (např. jednoduché aritmetické výpočty) v přímočarých situacích se zřejmým postupem výpočtu.

b) Prostor a tvar

Úroveň	Kompetence žáků
6	Žáci jsou schopni řešit složité úlohy obsahující nejrůznější reprezentace a vyžadují často více kroků postupy. Dokážou vyhledat příslušnou informaci a propojovat různé, ale vzájemně související informace. Mají vhléd do složitých geometrických situací a jsou schopni analyzovat složité a neznámé způsoby znázornění. Své výsledky jsou schopni zobecnit a umějí vysvětlit a zdůvodnit svá řešení.
5	Žáci jsou schopni formulovat hypotézy nebo aplikovat hypotézy uvedené v zadání úlohy. Mají rozvinuté prostorové uvažování a vhléd do dvou i třírozměrných objektů. Jsou schopni vyhledat potřebnou informaci, analyzovat a propojovat různá znázornění. Při řešení postupují strategicky a dokážou provádět postupy o více krocích. Dokážou aplikovat známé geometrické algoritmy v neznámých kontextech.
4	Žáci jsou schopni řešit úlohy vyžadující vizuální a prostorové uvažování v neznámých kontextech. Dokážou propojovat a integrovat různá znázornění a provádět postupy zahrnující řadu kroků. Jsou schopni používat dvourozměrné modely třírozměrných reprezentací neznámých geometrických objektů a analyzovat složitější geometrické problémy.

3	Žáci dokážou řešit úlohy, které vyžadují základní vizuální a prostorové uvažování ve známých kontextech. Jsou schopni propojovat různá znázornění známých objektů, používat elementární strategie řešení a aplikovat jednoduché algoritmy.
2	Žáci jsou schopni řešit úlohy, které obsahují pouze jednu matematickou reprezentaci a jejichž matematický obsah je zřejmý. Používají základní matematické myšlení a základní geometrické pojmy a vztahy ve známých kontextech.
1	Žáci jsou schopni řešit pouze jednoduché úlohy ve známých kontextech. Dokážou pracovat jen se známými zobrazeními a nákresy geometrických objektů a používat základní výpočetní dovednosti.

c) Změna a vztahy

Úroveň	Kompetence žáků
6	Žáci jsou schopni řešit problémy vyžadující velkou míru vhledu, abstraktní uvažování, argumentaci, technické znalosti a zásady. Dokážou interpretovat složité informace ukryté v kontextu neznámé reálné situace. Matematická řešení dokážou zobecnit a aplikovat na složité problémy z reálného světa.
5	Žáci používají složité algebraické a jiné formální výrazy a matematické modely. Dokážou najít vztah mezi formálními matematickými reprezentacemi (např. funkcemi) a reálnými situacemi. Používají složité strategie řešení problémů, které obsahují několik kroků, a dokážou popsat a posoudit své úvahy a argumenty.
4	Žáci jsou schopni pracovat se složitějšími reprezentacemi včetně jasně formulovaných matematických modelů reálných situací. Dokážou interpretovat a uvažovat se značnou mírou flexibility a řešit úlohy zasazené do neznámých kontextů. Jsou schopni vysvětlit své závěry a argumenty.
3	Žáci jsou schopni řešit úlohy ze známých kontextů, které vyžadují práci s větším počtem vzájemně souvisejících reprezentací (text, graf, tabulka, vzorec) a určitou míru interpretace a uvažování. Jsou schopni popsat své úvahy a postupy.
2	Žáci jsou schopni používat jednoduché algoritmy, vzorce a postupy. Dokážou propojit text s jednou matematickou reprezentací (grafem, tabulkou, jednoduchým vzorcem). Užívají elementární interpretační dovednosti a elementární způsoby uvažování.
1	Žáci jsou schopni číst jednoduché tabulky nebo grafy a vyhledávat v nich požadované informace podle přímých a jednoduchých pokynů. Dokážou provádět jednoduché výpočty, které obsahují vztahy mezi dvěma známými proměnnými.

d) Neurčitost

Úroveň	Kompetence žáků
6	Žáci používají rozvinuté matematické myšlení ve statistických nebo pravděpodobnostních kontextech a jsou schopni matematicky vyjádřit složité situace z reálného světa. Používají proporcionální úvahy, logické myšlení a argumentaci založenou na statistických pojmech. Dokážou formulovat složité argumenty a vysvětlení.
5	Žáci jsou schopni používat znalosti z oblasti pravděpodobnosti a statistiky v méně strukturovaných problémových situacích, kde je matematické vyjádření zjevné jen částečně. Při posuzování a analýze daných informací pracují s vzhledem, který jim umožňuje vytvářet vhodné modely a provádět výpočty obsahující více kroků. Umějí popsat svá zdůvodnění a argumenty.

4	Žáci dokážou používat základní pojmy z oblasti pravděpodobnosti a statistiky a kombinovat je s numerickým uvažováním v méně známých kontextech. Jsou schopni provádět výpočty, které obsahují několik kroků. Umějí používat zdůvodnění, která vycházejí z analýzy dat.
3	Žáci jsou schopni interpretovat statistické informace a data, dokážou propojovat různé zdroje informací. Jsou schopni provádět základní úvahy s jednoduchými pojmy, symboly a zásadami z oblasti pravděpodobnosti a své úvahy umějí popsat.
2	Žáci jsou schopni vyhledat statistickou informaci ve známém typu grafu, rozumějí základním statistickým pojmům (např. průměr) a zásadám.
1	Žáci rozumějí základním pojmům z oblasti pravděpodobnosti a umějí je používat v dobře známých kontextech (např. hry s kostkami nebo mincemi).

Relativně nejlepšího výsledku dosáhli naši žáci v oblasti *kvantita* a naopak nejhůře si vedli v oblasti *neurčitost*. V této oblasti se nachází nejvíce žáků pod úrovní 2 a celkový bodový výsledek je ve srovnání se zeměmi OECD pouze průměrný. Tyto výsledky nejsou příliš překvapivé a odpovídají tomu, jak je výuka matematiky pojímána na českých školách. Zatímco na procvičování numerických dovedností je kladen velký důraz již od prvního stupně základní školy, statistika a pravděpodobnost je součástí kurikula až od osmého ročníku. Stojí za úvahu, zda by těmto tématům neměl být věnován poněkud větší prostor, protože neurčitost je podstatnou vlastností současného světa a matematicky gramotní občané by měli být schopni s ní rozumně zacházet.

Při porovnání průměrných bodových skóre chlapců a dívek nacházíme největší rozdíly na škále *prostor a tvar*. Naopak na škále *kvantita* jsou výsledky obou pohlaví víceméně vyrovnané. Takovéto rozložení výsledků chlapců a dívek není charakteristické pouze pro Českou republiku, ale projevilo se v mnoha dalších zemích. Existují však i země (zejména země severní Evropy a jihovýchodní Asie), v nichž byly rozdíly na škále *prostor a tvar* minimální.

Tabulka 2.4 Výsledky českých žáků na dílčích škálách podle tematických okruhů

Tematický okruh	Podíl žáků pod úrovní 2	Průměrný výsledek			Rozdíl Ch – D
		Celkem	Chlapci	Dívky	
Kvantita	14 %	528	531	525	6
Prostor a tvar	19 %	527	542	512	30
Změna a vztahy	17 %	515	521	508	13
Neurčitost	20 %	500	509	492	17

2.1.3 Matematické dovednosti: tři třídy kompetencí

Matematické dovednosti jsou nejdůležitější složkou matematické gramotnosti. Při tvorbě úloh pro výzkum PISA se bralo v úvahu osm typů dovedností, které se uplatňují při řešení rozmanitých úkolů: *matematické myšlení, matematická argumentace, matematická komunikace, modelování, vymezování a řešení problémů, práce s reprezentacemi, užívání symbolického, formálního a technického jazyka a operací, užívání pomůcek a nástrojů*.

Záměrem výzkumu PISA však není hodnotit jednotlivé dovednosti odděleně, neboť při řešení reálných problémů se jich obvykle musí používat několik současně. Snaha o hodnocení jednot-

livých dovedností by vedla k umělým úlohám a ke zbytečnému rozdrobení oblasti matematické gramotnosti. Matematické dovednosti byly proto uspořádány do tří tříd kompetencí:

- *reprodukce*,
- *integrace*,
- *reflexe*.

Výše uvedené typy dovedností se objevují v každé třídě, avšak na různé úrovni.² V nejjednodušší podobě se uplatňují při reprodukci faktů a výpočetních postupů, v rozvinutější formě při propojování (integraci) různých poznatků a zdrojů a na nejvyšší úrovni při matematizaci složitých problémů, zdůvodňování a zobecňování.

Při zařazování otázek do jednotlivých tříd se analyzovala jejich náročnost z hlediska všech osmi typů dovedností. Pokud byly nároky otázky na některou dovednost ohodnoceny tak, že spadají do třídy reflexe, byla celá otázka zařazena do této třídy. Pokud žádná z požadovaných dovedností nevyhovovala třídě reflexe, ale jedna nebo více z nich odpovídaly třídě integrace, byla otázka zařazena do třídy integrace. Ostatní otázky byly zařazeny do třídy reprodukce. Rozdělení testových otázek výzkumu PISA 2003 do tříd kompetencí ukazuje tabulka 2.5.

Tabulka 2.5 Rozdělení matematických testových otázek podle tříd kompetencí

Třída kompetencí	Počet otázek	%
Reprodukce	26	31
Integrace	40	47
Reflexe	19	22
Celkem	85	100

Popis tříd kompetencí

Reprodukce

Dovednosti náležející do této třídy představují reprodukci probraných a procvičených znalostí. Jsou to ty dovednosti, které jsou nejčastěji sledovány ve standardizovaných testech a školních prověrkách. Patří sem znalost základních faktů, vlastností a pojmů a zacházení s nimi v kontextech, v nichž byly osvojeny nebo procvičeny. Dále provádění rutinních postupů a výpočtů, aplikace standardních algoritmů, práce s výrazy obsahujícími symboly a vzorce ve standardní formě a používání procvičených reprezentací dobře známých matematických objektů. Převody mezi reprezentacemi se uplatní pouze tehdy, jsou-li osvojenou součástí učiva. Úlohy zařazené do třídy reprodukce patří k těm nejjednodušším, nacházejí se ve spodní části škály matematické gramotnosti.

Integrace

Dovednosti ze třídy integrace se použijí při řešení problémů v situacích, které již nejsou jednoduchou rutinou, ale přesto jsou víceméně známé. Patří sem zacházení s matematickými pojmy

² Původně se uvažovalo o vytvoření tříd kompetencí umožňujících vypracování dílčích škál podle dovedností, podobně jako tomu bylo u čtenářské gramotnosti v rámci výzkumného cyklu PISA 2000. V takovém případě by se do každé třídy kompetencí musely zařadit úlohy od nejjednodušších až po ty nejobtížnější. To se zde bohužel nepodařilo, neboť se ukázalo, že jednotlivé třídy už svou podstatou navozují určité, omezené rozpětí obtížnosti. Proto byly dílčí škály nakonec vytvořeny pro tematické okruhy, kde bylo možné sledovat různé úrovně dovedností v celém rozsahu.

v mírně odlišných souvislostech, než v jakých byly osvojeny a procvičeny, a převádění reality do matematických struktur v kontextech, které nejsou příliš složité, ale ani zcela běžné. Typické je řešení standardních problémů vyžadujících propojování různých matematických oblastí a různých způsobů reprezentace, převádění a rozlišování mezi reprezentacemi. Při výpočtech se uplatní úvahy a postupy složené z několika kroků. Úlohy ze třídy integrace jsou středně obtížné a rozprostírají se v široké prostřední části matematické škály.

Reflexe

Dovednosti z této třídy se týkají uvažování o postupech potřebných k řešení problémů, plánování strategií řešení a jejich aplikace na problémové situace, které obsahují více prvků a mohou být méně známe než situace typické pro třídu integrace. K typickým dovednostem z této třídy patří zacházení s matematickými pojmy v nových a neznámých kontextech, aktivní strukturování neznámých či složitých problémových situací, hledání podstatných prvků problému, tvořivé kombinování, samostatné vytváření řetězců matematických argumentů, používání většího počtu komplexních postupů a jejich kritické posuzování. Kompetence spadající do této třídy lze charakterizovat slovy vyspělé uvažování, rozvinutá schopnost argumentace, modelování v nových kontextech, abstrakce a zobecňování. Úlohy náležející do třídy reflexe se nacházejí na vrcholu matematické škály.

2.2 Formální podoba testových úloh

Testové úlohy výzkumu PISA se od běžných úloh známých z učebnic nebo standardizovaných testů liší nejen tím, na jaké aspekty matematického učiva se zaměřují, ale i po formální stránce.

Obvykle začínají úvodní částí, která přibližuje téma úlohy a navozuje její situování do reálného světa. Úlohu může uvádět text, tabulka, obrázek, graf nebo kombinace textových a grafických prvků. Teprve poté následuje vlastní otázka či otázky. Pro úlohy výzkumu PISA je příznačné, že obsahují několik otázek různého typu, které se na hlavní téma úlohy dívají z různých stran, vyžadují různé vědomosti a hodnotí různé dovednosti.

Tento způsob zadání úlohy lépe odráží různorodost situací z reálného života, žákům umožňuje hlouběji proniknout do dané problematiky a uplatnit komplexnější vědomosti a dovednosti, na jejichž hodnocení nebývá v běžných písemných testech dostatek času ani prostoru. Při sestavování matematického testu PISA 2003 se bohužel zcela nepodařilo dosáhnout tomuto ideálu a úlohy často obsahují pouze jednu či dvě otázky.

2.2.1 Typy otázek

Ve výzkumu PISA se na rozdíl od většiny mezinárodních výzkumů nebo národních standardizovaných testů neobjevují pouze otázky s výběrem odpovědi z několika nabízených možností, ale také otázky, které žáky vyzývají k vytvoření vlastní odpovědi. Žáci mohou být například požádáni o zdokumentování postupu řešení nebo o vysvětlení, proč se přiklání k určitému názoru. Tyto otázky jsou sice pro žáky složitější a jejich hodnocení je poměrně pracné, často jsou však jedinou možností, jak zjišťovat dovednosti na vyšších úrovních způsobilosti, zejména kompetence z třídy reflexe.



V testu bylo použito celkem pět typů otázek:

- *otázky s výběrem odpovědi,*
- *komplexní otázky s výběrem odpovědi,*
- *uzavřené otázky s tvorbou odpovědi,*
- *otevřené otázky s tvorbou odpovědi,*
- *otázky s krátkou odpovědí.*

Zastoupení různých typů otázek v matematickém testu PISA 2003 je uvedeno v tabulce 2.6.

Tabulka 2.6 Rozdělení matematických testových otázek podle typu

Typ otázky	Počet otázek	%
S výběrem odpovědi	17	20
Komplexní s výběrem odpovědi	11	13
Uzavřené s tvorbou odpovědi	13	15
Otevřené s tvorbou odpovědi	21	25
S krátkou odpovědí	23	27
Celkem	85	100

V otázkách s výběrem odpovědi žáci vybírají jedinou správnou ze čtyř nebo pěti možností. Komplexní otázky s výběrem odpovědi se obvykle skládají z několika výroků, u nichž žáci posuzují správnost nebo je hodnotí podle jiných kritérií uvedených v zadání úlohy. U každého výroku se zpravidla rozhodují mezi dvěma možnostmi (například ano/ne). Odpovědi na tyto otázky lze vyhodnocovat automaticky.

V obou typech otázek s tvorbou odpovědi i v otázkách s krátkou odpovědí žáci svou odpověď vytvářejí sami, jednotlivé typy otázek se ale liší tím, jaký druh odpovědi je po žácích požadován. Otevřené otázky vyžadují rozsáhlejší odpověď (například popis postupu řešení nebo zdůvodnění názoru) a mnohé z nich umožňují získání částečného počtu bodů za neúplnou nebo ne zcela přesnou odpověď. Uzavřené otázky vyžadují pouze stručnou odpověď, jejíž správnost lze často vyhodnocovat automaticky. Obvykle se jedná o uvedení číselného výsledku. V otázkách s krátkou odpovědí žáci rovněž tvoří pouze stručnou odpověď, rozsah přijatelných odpovědí je ale mnohem širší než v případě uzavřených otázek, a musí být proto odborně vyhodnocovány vyškolenými osobami stejně jako otevřené otázky.

2.2.2 Vyhodnocování žákovských odpovědí

Jak bylo naznačeno výše, některé úlohy výzkumu PISA po žácích vyžadují takové typy odpovědí, které nelze hodnotit automaticky porovnáním s jasně definovanou správnou odpovědí. K těmto úlohám byly proto vypracovány podrobné návody na vyhodnocování, které zajišťovaly jednotný způsob hodnocení ve všech zúčastněných zemích. Obsahují jednak obecná kritéria pro posouzení kvality odpovědi, jednak ilustrační příklady možných žákovských odpovědí.

Skutečné žákovské odpovědi byly porovnávány se stanovenými kritérii a posuzovalo se, nakolik jim žákova odpověď vyhovuje. Podle toho byl pak odpovědi přiřazen příslušný kód vyjadřující počet bodů. Pokud odpověď splňovala všechny požadavky, byla označena jako *úplná* a získala

plný počet bodů. Pokud uvedené požadavky nesplňovala, byla označena jako *nevyhovující* a žák za ni nezískal žádný bod. U některých úloh se počítalo i s možností získání částečného počtu bodů za *částečnou* odpověď, která vyhovovala jen některým z uvedených kritérií. Také posouzení toho, zda je žakovu odpověď ještě možné považovat za částečnou nebo už za nevyhovující, nebylo ponecháno na subjektivním rozhodnutí hodnotitelů, ale řídilo se přesným popisem prvků, které musí odpověď obsahovat, aby mohla být ohodnocena jako částečná.

K hodnocení některých otázek se používaly dvouciferné kódy umožňující sledovat vedle správnosti také různé typy odpovědí. První číslice dvouciferného kódu udává počet bodů a druhá příslušný typ odpovědi. Tento způsob hodnocení nachází uplatnění tehdy, když na položenou otázku existuje více správných odpovědí nebo když je ke správnému řešení možné dojít různými postupy. Dvoucifernými kódy lze však označovat i různé druhy nevyhovujících odpovědí. V takovém případě umožňují rozlišit různé druhy chyb a analyzovat jejich četnost. Rozborem nejčastějších nesprávných odpovědí může učitel snáze porozumět tomu, proč žáci chybují.

Při hodnocení žakovských odpovědí je obecně kladen důraz na podstatné rysy úloh. Pokud je z odpovědi jasné, že žák úlohu pochopil a použil k jejímu řešení správný postup, není důvod trvat na formálně správné formulaci nebo požadovat znalost odborné terminologie. Důležitou zásadou výzkumu PISA je to, že se hodnocení zaměřuje na vyhledávání správných prvků v odpovědích žáků. Pokud odpověď obsahuje nesprávné prvky, které jsou z hlediska položené otázky irelevantní, nestrhávají se za ně žádné body, ale jednoduše se neberou v úvahu. Nepřihlíží se ani k pravopisným chybám či stylistické neobratnosti, je-li smysl odpovědi zřejmý.

Jasnější představu o tom, jak byly odpovědi žáků na testové úlohy výzkumu PISA v praxi hodnoceny, lze získat z následujících kapitol, kde ke každé úloze uvádíme i návod na její vyhodnocování.

3. ÚLOHY POUŽITÉ V HLAVNÍM ŠETŘENÍ – KVANTITA

V této kapitole uvádíme pět úloh zařazených do tematického okruhu kvantita. Na začátku úlohy je obvykle úvodní text nebo obrázek, za nímž následují jednotlivé otázky. U každé otázky uvádíme její základní klasifikaci (typ situace, třídu kompetencí, typ otázky) a obtížnost vyjádřenou jednak bodovým skórem na dílčí matematické škále pro tento okruh, jednak úrovní způsobilosti, do níž byla zařazena.

Pro lepší představu o tom, jak obtížné byly jednotlivé otázky pro naše žáky, uvádíme u každé otázky průměrnou úspěšnost našich žáků a pro srovnání též průměrnou úspěšnost žáků zemí OECD. Za každou otázkou následuje návod na vyhodnocování žakovských odpovědí a četnost odpovědí českých žáků v procentech.

ÚLOHA 1: SMĚNNÝ KURZ

Mei-Ling ze Singapuru se připravovala na tříměsíční studijní pobyt do Jižní Afriky. Potřebovala si vyměnit singapurské dolary (SGD) za jihoafrické randy (ZAR).

Otázka 1.1: Směnný kurz

Tematický okruh: kvantita
Situace: veřejná
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilost: úroveň 1
Obtížnost: 406

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	86,7 %	86,6 %	86,8 %
OECD	79,7 %	78,9 %	80,4 %

Mei-Ling zjistila, že kurz singapurského dolaru k jihoafrickému randu je:

1 SGD = 4,2 ZAR

Mei-Ling si v tomto kurzu směnila 3000 singapurských dolarů na jihoafrické randy.

Kolik jihoafrických randů Mei-Ling dostala?

Odpověď:

Hodnocení otázky 1.1

Úplná odpověď

Kód 1: 12 600 ZAR (jednotky nejsou požadovány)

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	86,7 %	8,7 %	4,6 %

Otázka 1.2: Směnný kurz

Tematický okruh: kvantita
Situace: veřejná
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobnost: úroveň 2
Obtížnost: 439

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	83,7 %	82,2 %	85,2 %
OECD	73,9 %	72,8 %	74,9 %

Když se po třech měsících Mei-Ling vracela do Singapur, zbývalo jí 3 900 ZAR. Když si je měnila zpět na singapurské dolary, všimla si, že se kurz změnil na:

1 SGD = 4,0 ZAR

Kolik singapurských dolarů Mei-Ling dostala?

Odpověď:

Hodnocení otázky 1.2

Úplná odpověď

Kód 1: 975 SGD (jednotky nejsou požadovány)

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	83,7 %	10,2 %	6,1 %

Otázka 1.3: Směnný kurz

Tematický okruh: kvantita
Situace: veřejná
Třída kompetencí: reflexe
Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi
Způsobnost: úroveň 4
Obtížnost: 586

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	45,7 %	48,3 %	43,0 %
OECD	40,3 %	42,0 %	38,6 %

Během těchto tří měsíců se kurz změnil ze 4,2 na 4,0 ZAR za SGD.

Bylo pro Mei-Ling výhodné, že když měnila své jihoafrické randy zpět na singapurské dolary, byl kurz 4,0 ZAR místo 4,2 ZAR za jeden SGD? Odůvodni svou odpověď.

Hodnocení otázky 1.3**Úplná odpověď**

Kód 11: „Ano“ s vhodným odůvodněním.

- Ano, při nižším kurzu (za 1 SGD) dostala Mei-Ling za své jihoafrické randy více singapurských dolarů.
- Ano, 4,2 ZAR za jeden singapurský dolar by dalo 929 ZAR. [Poznámka: žák napsal ZAR místo SGD, ale zřetelně uvedl správný výpočet a porovnání. Tuto chybu můžete ignorovat.]
- Ano, protože dostala 4,2 ZAR za 1 SGD a nyní musí zaplatit jen 4,0 ZAR, aby dostala 1 SGD.
- Ano, protože každý SGD je levnější o 0,2 ZAR.
- Ano, protože když dělíš číslem 4,2, výsledek je menší, než když dělíš čtyřmi.
- Ano, bylo to pro ni výhodné, protože kdyby to nekleslo, měla by o 50 dolarů méně.

Nevyhovující odpověď

Kód 01: „Ano“ bez odůvodnění nebo s nesprávným odůvodněním.

- Ano, nižší směnný kurz je lepší.
- Ano, bylo to pro Mei-Ling výhodné, protože když ZAR klesá, pak bude mít více peněz na výměnu SGD.
- Ano, bylo to pro Mei-Ling výhodné.

Kód 02: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	45,7 %	39,7 %	14,6 %

ÚLOHA 2: KNIHOVNIČKA

Otázka 2.1: Knihovnička

Tematický okruh: kvantita
Situace: pracovní
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilost: úroveň 3
Obtížnost: 499

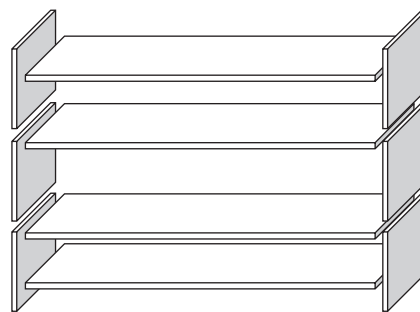
Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	72,2 %	67,7 %	76,3 %
OECD	60,9 %	60,0 %	61,8 %

Na zhotovení jedné knihovničky truhlář potřebuje:

4 dlouhá prkna,
 6 krátkých prken,
 12 malých úchytek,
 2 velké úchytky a
 14 šroubů.

Truhlář má ve skladu 26 dlouhých prken, 33 krátkých prken, 200 malých úchytek, 20 velkých úchytek a 510 šroubů.

Kolik knihovniček z nich může udělat?



Odpověď:

Hodnocení otázky 2.1

Úplná odpověď

Kód 1: 5

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	72,2 %	21,4 %	6,4 %

ÚLOHA 3: MENU**Otázka 3.1: Menu**

Tematický okruh: *kvantita*
Situace: *pracovní*
Třída kompetencí: *integrace*
Formát otázky: *s krátkou odpovědí*
Způsobilost: *úroveň 4*
Obtížnost: *559*

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	48,3 %	52,2 %	44,3 %
OECD	48,8 %	51,3 %	46,2 %

V pizzerii si můžeš dát základní pizzu se dvěma přísadami: sýrem a rajčaty. Také si můžeš vytvořit svou vlastní pizzu s **dalšími** přísadami. Můžeš si vybrat z dalších čtyř druhů přísad: olivy, šunka, žampiony a salám.

Rudla si chce objednat pizzu se dvěma **dalšími** přísadami.

Z kolika různých kombinací má Rudla na výběr?

Odpověď: kombinací

Hodnocení otázky 3.1**Úplná odpověď**

Kód 1: 6

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	48,3 %	47,4 %	4,3 %

ÚLOHA 4: SKATEBOARD

Emil rád jezdí na skateboardu. Zašel do obchodu RÁJ SKATERŮ, aby zjistil ceny.

V tomto obchodě je k dostání kompletní skateboard. Nebo se tam dá koupit prkno, sada 4 koleček, sada 2 závěsů a sada spojovacích prvků a pak si může sestavit svůj vlastní skateboard.

Ceny zboží v obchodě jsou:

Zboží	Ceny v zedech	
kompletní skateboard	82 nebo 84	
prkno	40, 60 nebo 65	
sada 4 koleček	14 nebo 36	
sada 2 závěsů	16	
sada spojovacích prvků (ložiska, gumové podložky, šrouby a matky)	10 nebo 20	

Otázka 4.1: Skateboard

Tematický okruh: kvantita

Situace: osobní

Třída kompetencí: reprodukce

Formát otázky: s krátkou odpovědí

Způsobnost: úroveň 2 (částečná odpověď)

úroveň 3 (úplná odpověď)

Obtížnost: 464 (částečná odpověď), 496 (úplná odpověď)

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	75,4 %	74,3 %	76,4 %
OECD	72,0 %	71,3 %	72,7 %

Emil si chce svůj skateboard sestavit sám. Jaká je v tomto obchodě nejnižší cena a nejvyšší cena za skateboard v dílech?

(a) Nejnižší cena: zedů

(b) Nejvyšší cena: zedů

Hodnocení otázky 4.1**Úplná odpověď**

Kód 21: Obě ceny správně: nejnižší 80 zedů a nejvyšší 137 zedů

Částečná odpověď

Kód 11: Pouze nejnižší cena (80) správně

Kód 12: Pouze nejvyšší cena (137) správně

Nevyhovující odpověď

Kód 00: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	70,4 %	9,9 %	16,0 %	3,7 %

Otázka 4.2: Skateboard

Tematický okruh: kvantita

Situace: osobní

Třída kompetencí: reprodukce

Formát otázky: s výběrem odpovědi

Způsobilost: úroveň 4

Obtížnost: 570

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	51,0 %	47,3 %	54,6 %
OECD	45,5 %	42,0 %	49,0 %

V obchodě mají tři typy prken, dva typy koleček a dva typy spojovacích prvků. Závěsy jsou jen jednoho druhu.

Kolik různých skateboardů může Emil sestavit?

A 6

B 8

C 10

D 12

Hodnocení otázky 4.2**Úplná odpověď**

Kód 1: D 12

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	A	B	C	D	Bez odpovědi
Četnost	22,1 %	17,4 %	6,0 %	51,0 %	3,5 %

Otázka 4.3: Skateboard

Tematický okruh: kvantita
Situace: osobní
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilost: úroveň 4
Obtížnost: 554

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	54,7 %	56,1 %	53,3 %
OECD	49,8 %	48,9 %	50,7 %

Emil má 120 zedů a chce si koupit ten nejdražší skateboard, na který mu stačí peníze.

Kolik si může dovolit utratit Emil za každý ze 4 dílů? Doplň odpovědi do tabulky.

Díl	Částka (v zedech)
prkno	
kolečka	
závěsy	
spojovací prvky	

Hodnocení otázky 4.3

Úplná odpověď

Kód 1: 65 zedů za prkno, 14 za kolečka, 16 za závěsy a 20 za spojovací prvky

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků						
Správné odpovědi*	4	3	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	54,7 %	15,6 %	13,6 %	5,8 %	4,9 %	5,4 %

* V tabulce je uveden počet správných odpovědí.

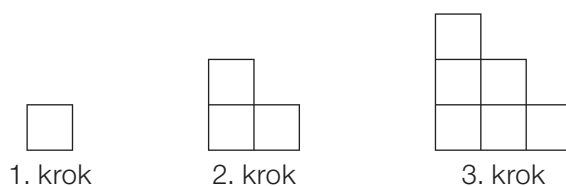
ÚLOHA 5: SCHODIŠTĚ

Otázka 5.1: Schodiště

Tematický okruh: kvantita
Situace: vzdělávací
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilost: úroveň 3
Obtížnost: 484

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	77,9 %	76,5 %	79,2 %
OECD	66,2 %	63,9 %	68,5 %

Rudla si skládá schodiště ze čtverců. První tři kroky vypadají takto:



Jak je vidět, potřebuje na 1. krok jeden čtverec, na 2. krok tři čtverce a na 3. krok šest čtverců.

Kolik čtverců bude Rudla potřebovat na 4. krok?

Odpověď: čtverců

Hodnocení otázky 5.1

Úplná odpověď

Kód 1: 10

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	77,9 %	21,7 %	0,4 %

4. ÚLOHY POUŽITÉ V HLAVNÍM ŠETŘENÍ – PROSTOR A TVAR

Tato kapitola obsahuje čtyři úlohy zařazené do tematického okruhu prostor a tvar. Na začátku úlohy je obvykle úvodní text nebo obrázek, za nímž následují jednotlivé otázky. U každé otázky uvádíme její základní klasifikaci (typ situace, třídu kompetencí, typ otázky) a obtížnost vyjádřenou jednak bodovým skórem na dílčí matematické škále pro tento okruh, jednak úrovní způsobilosti, do níž byla zařazena.

Pro lepší představu o tom, jak obtížné byly jednotlivé otázky pro naše žáky, uvádíme u každé otázky průměrnou úspěšnost našich žáků a pro srovnání též průměrnou úspěšnost žáků zemí OECD. Za každou otázkou následuje návod na vyhodnocování žakovských odpovědí a četnost odpovědí českých žáků v procentech.

ÚLOHA 1: KOSTKY

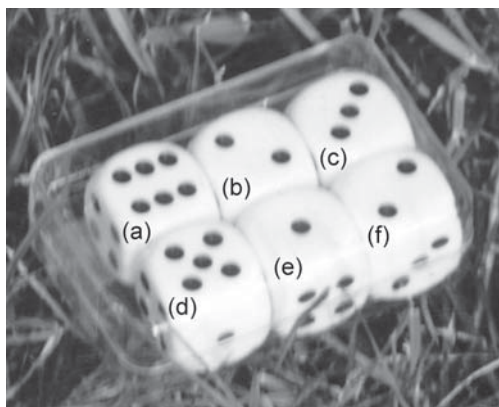
Otázka 1.1: Kostky

Tematický okruh: *prostor a tvar*
Situace: *pracovní*
Třída kompetencí: *reprodukce*
Formát otázky: *uzavřená s tvorbou odpovědi*
Způsobilost: *úroveň 2*
Obtížnost: 478

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	74,5 %	72,8 %	76,1 %
OECD	68,0 %	68,3 %	67,8 %

Na fotografii je šest kostek označených (a) až (f). Pro všechny tyto kostky platí pravidlo:

Součet teček na dvou protilehlých stěnách každé kostky je vždy sedm.



Zapiš do každého políčka počet teček na **spodní** stěně odpovídající kostky na fotografii.

(a)	(b)	(c)
(d)	(e)	(f)

Hodnocení otázky 1.1**Úplná odpověď**

Kód 1: Horní řádek (1 5 4), dolní řádek (2 6 5). Ekvivalentní odpověď znázorňující stěny kostek je také přijatelná.

1	5	4
2	6	5

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků								
Správné odpovědi*	6	5	4	3	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	74,5 %	3,6 %	1,2 %	2,2 %	3,5 %	4,2 %	5,5 %	5,3 %

* V tabulce je uveden počet správných odpovědí.

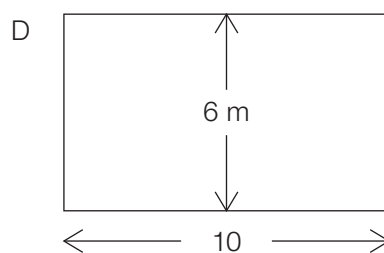
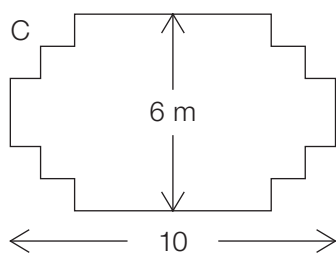
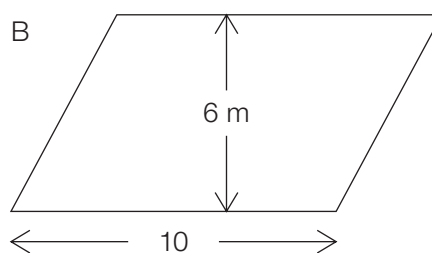
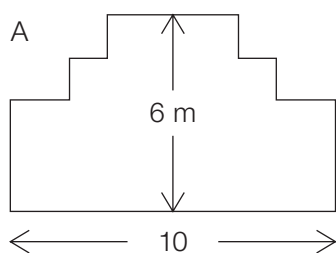
ÚLOHA 2: TESAŘ

Otázka 2.1: Tesař

Tematický okruh: prostor a tvar
Situace: vzdělávací
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: komplexní s výběrem odpovědi
Způsobilost: úroveň 6
Obtížnost: 687

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	28,9 %	23,2 %	34,5 %
OECD	20,0 %	17,2 %	22,7 %

Tesař má 32 metrů dřeva na ohrazení záhonu na zahradě. Uvažuje o následujících tvarech záhonu.



Zakroužkuj buď „Ano“, nebo „Ne“ u každého tvaru záhonu podle toho, zda může nebo nemůže být vytvořen z 32 metrů dřeva.

Tvar záhonu	Může být tvar záhonu vytvořen z 32 metrů dřeva?
Tvar A	Ano / Ne
Tvar B	Ano / Ne
Tvar C	Ano / Ne
Tvar D	Ano / Ne

Hodnocení otázky 2.1

Úplná odpověď

Kód 1: Všechny čtyři správně

Tvar A Ano

Tvar B Ne

Tvar C Ano

Tvar D Ano

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Tři nebo méně správně

Odpovědi českých žáků						
Správné odpovědi*	4	3	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	28,9 %	30,6 %	16,0 %	21,6 %	0,8 %	2,1 %

* V tabulce je uveden počet správných odpovědí.

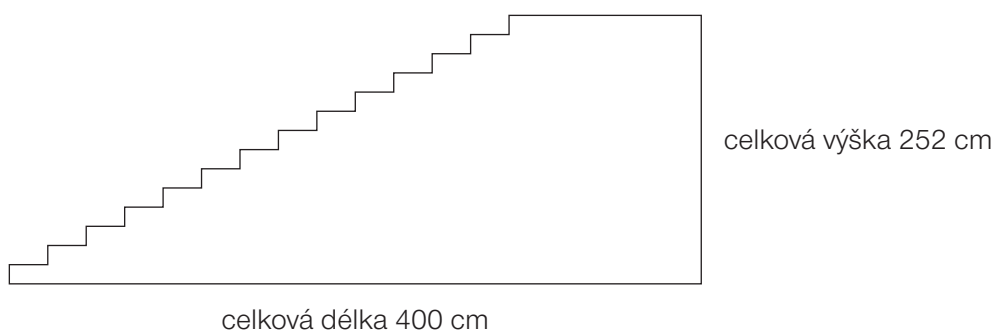
ÚLOHA 3: SCHODIŠTĚ

Otázka 3.1: Schodiště

Tematický okruh: *prostor a tvar*
Situace: *pracovní*
Třída kompetencí: *reprodukce*
Formát otázky: *s krátkou odpovědí*
Způsobilost: *úroveň 2*
Obtížnost: *421*

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	79,2 %	76,8 %	81,5 %
OECD	78,0 %	77,0 %	79,1 %

Na obrázku je znázorněno schodiště se 14 schody a celkovou výškou 252 cm:



Jak vysoký je každý ze 14 schodů?

Výška: cm

Hodnocení otázky 3.1

Úplná odpověď

Kód 1: 18

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

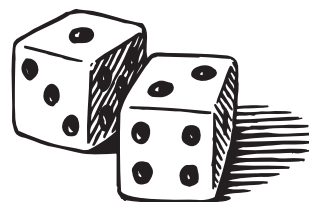
Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	79,2 %	13,0 %	7,8 %

ÚLOHA 4: HRACÍ KOSTKY

Na obrázku vpravo jsou dvě hrací kostky.

Hrací kostky jsou zvláštním případem krychlí s tečkami na stěnách, pro něž platí následující pravidlo:

Celkový počet teček na dvou protilehlých stěnách je vždy sedm.



Otázka 4.1: Hrací kostky

Tematický okruh: *prostor a tvar*

Situace: *osobní*

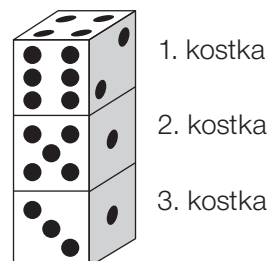
Třída kompetencí: *integrace*

Formát otázky: *otevřená s tvorbou odpovědi*

Poznámka: Tato otázka byla zadávána pouze v rámci pilotního šetření. Protože nebyla zařazena do hlavního šetření, není k dispozici údaj o její obtížnosti ani mezinárodní výsledky.

Vpravo jsou tři hrací kostky postavené na sobě. 1. kostka má nahoře čtyři tečky.

Kolik teček je **celkem** na pěti vodorovných stěnách, které nejsou vidět (spodek 1. kostky, spodek a vršek 2. a 3. kostky)?



Hodnocení otázky 4.1

Úplná odpověď

Kód 1: 17

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

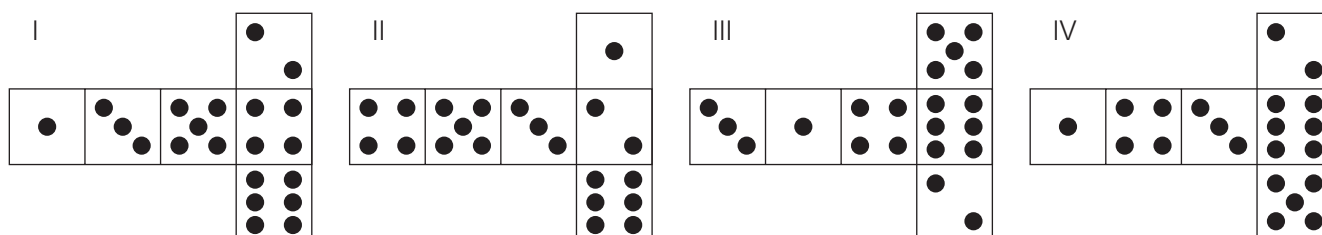
Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	45,4 %	29,5 %	25,1 %

Otázka 4.2: Hrací kostky**Tematický okruh:** *prostor a tvar***Situace:** *osobní***Třída kompetencí:** *integrace***Formát otázky:** *komplexní s výběrem odpovědi***Způsobilost:** *úroveň 3***Obtížnost:** *503*

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	73,4 %	71,4 %	75,3 %
OECD	63,0 %	62,3 %	62,7 %

Hrací kostku lze snadno vystříhnout, složit a slepit z tvrdého papíru, a to několika způsoby. Na obrázku dole jsou čtyři tvary, z nichž lze složit krychle s tečkami na stěnách.

Ze kterých z následujících útvarů lze složit krychli vyhovující požadavku, aby součet protilehlých stěn byl celkem 7? U každého útvaru zakroužkuj v tabulce buď „Ano“, nebo „Ne“.



Útvar	Vyhovuje požadavku, aby součet protilehlých stěn byl celkem 7?
I	Ano / Ne
II	Ano / Ne
III	Ano / Ne
IV	Ano / Ne

Hodnocení otázky 4.2**Úplná odpověď**

Kód 1: Ne, Ano, Ano, Ne v tomto pořadí

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků						
Správné odpovědi*	4	3	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	73,4 %	14,3 %	5,5 %	4,0 %	1,2 %	1,6 %

* V tabulce je uveden počet správných odpovědí.

5. ÚLOHY POUŽITÉ V HLAVNÍM ŠETŘENÍ – ZMĚNA A VZTAHY

Tato kapitola obsahuje čtyři úlohy zařazené do tematického okruhu změna a vztahy. Na začátku úlohy je obvykle úvodní text nebo obrázek, za nímž následují jednotlivé otázky. U každé otázky uvádíme její základní klasifikaci (typ situace, třídu kompetencí, typ otázky) a obtížnost vyjádřenou jednak bodovým skórem na dílčí matematické škále pro tento okruh, jednak úrovní způsobilosti, do níž byla zařazena.

Pro lepší představu o tom, jak obtížné byly jednotlivé otázky pro naše žáky, uvádíme u každé otázky průměrnou úspěšnost našich žáků a pro srovnání též průměrnou úspěšnost žáků zemí OECD. Za každou otázkou následuje návod na vyhodnocování žákovských odpovědí a četnost odpovědí českých žáků v procentech.

ÚLOHA 1: CHŮZE



Na obrázku jsou stopy kráčejícího muže. Délka kroku P je vzdálenost mezi konci dvou po sobě následujících stop.

Vzorec $\frac{n}{P} = 140$ udává přibližně vztah mezi n a P pro muže, kde

n je počet kroků za minutu a

P je délka kroku v metrech.

Otázka 1.1: Chůze

Tematický okruh: změna a vztahy
Situace: osobní
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 5
Obtížnost: 611

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	48,7 %	51,9 %	45,6 %
OECD	36,3 %	36,1 %	36,6 %

Použijme vzorec na Honzovu chůzi, který udělá 70 kroků za minutu. Jak dlouhý krok má Honza? Zapiš postup výpočtu.

Hodnocení otázky 1.1**Úplná odpověď**

Kód 2: 0,5 m nebo 50 cm, $\frac{1}{2}$ (jednotky nepožadovány)

- $70/p = 140$
 $70 = 140 p$
 $p = 0,5$
- 70/140

Částečná odpověď

Kód 1: Správné dosazení čísel do vzorce, ale nesprávná nebo žádná odpověď.

- $\frac{70}{p} = 140$ [pouze dosazení čísel do vzorce]
- $\frac{70}{p} = 140$
 $70 = 140 p$
 $p = 2$ [správné dosazení, ale uvedený výpočet je nesprávně]
 NEBO
 Správně upravený vzorec na tvar $P = n/140$, ale dále již nic správného.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

- 70 cm

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	48,7 %	16,6 %	16,2 %	18,5 %

Otázka 1.2: Chůze

Tematický okruh: změna a vztahy

Situace: osobní

Třída kompetencí: integrace

Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi

Způsobnost: úroveň 4 (částečná odpověď, kód 11)
 úroveň 5 (částečná odpověď, kódy 21–24)
 úroveň 6 (úplná odpověď)

Obtížnost: 605 (částečná odpověď, kód 11), 666 (částečná odpověď, kódy 21–24), 723 (úplná odpověď)

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	26,7 %	26,6 %	26,9 %
OECD	20,6 %	19,6 %	21,6 %

David ví, že délka jeho kroku je 0,80 metru. Použij vzorec na Davidovu chůzi.

Vypočítej rychlost Davidovy chůze v metrech za minutu a v kilometrech za hodinu. Zapiš postup výpočtu.

Hodnocení otázky 1.2

Úplná odpověď

Kód 31: Správné odpovědi (jednotky nepožadovány) pro obojí – metry za minutu i kilometry za hodinu:

$$n = 140 \cdot 0,80 = 112.$$

Za minutu ujde $112 \cdot 0,80$ metrů = 89,6 metru.

Jeho rychlost je 89,6 metru za minutu.

Tedy jeho rychlost je 5,38 nebo 5,4 kilometru za hodinu.

Jestliže jsou obě odpovědi uvedeny správně (89,6 a 5,4), přiřadte Kód 31 bez ohledu na to, zda postup je, či není uveden. Chyby v zaokrouhlování jsou přípustné. Například 90 metrů za minutu a 5,3 kilometru za hodinu ($89 \cdot 60$) jsou akceptovatelné.

- 89,6; 5,4
- 90; 5,376 km/h
- 89,8; 5376 m/h [je-li druhá odpověď uvedena bez jednotek, měl by být přidělen Kód 22]

Částečná odpověď (2 body)

Kód 21: Jako u Kódu 31, ale chybí násobení číslem 0,80 pro převod z kroků za minutu na metry za minutu. Např. jeho rychlost je 112 metrů za minutu a 6,72 km/h.

- 112; 6,72 km/h

Kód 22: Rychlost v metrech za minutu správně (89,6 metru za minutu), ale převod na kilometry za hodinu nesprávně nebo chybí.

- 89,6 metru za minutu, 8960 km/h
- 89,6; 5376
- 89,6; 53,76
- 89,6; 0,087 km/h
- 89,6; 1,49 km/h

Kód 23: Správný postup (je uveden) s drobnými početními chybami, které nepostihuje Kód 21 ani Kód 22. Žádná správná odpověď.

- $n = 140 \cdot 0,8 = 1120$; $1120 \cdot 0,8 = 896$. Ujde 896 m/min; 53,76 km/h.
- $n = 140 \cdot 0,8 = 116$; $116 \cdot 0,8 = 92,8$. 92,8 m/min → 5,57 km/h.

Kód 24: Je uvedeno pouze 5,4 km/h, ale ne 89,6 metru za minutu (mezivýpočty nejsou uvedeny).

- 5,4
- 5,376 km/h
- 5376 m/h

Částečná odpověď (1 bod)

Kód 11: $n = 140 \cdot 0,80 = 112$. Od tohoto místa již není uveden žádný, nebo je uveden pouze chybný postup.

- 112
- $n = 112$; 0,112 km/h
- $n = 112$; 1120 km/h
- 112 m/min; 504 km/h

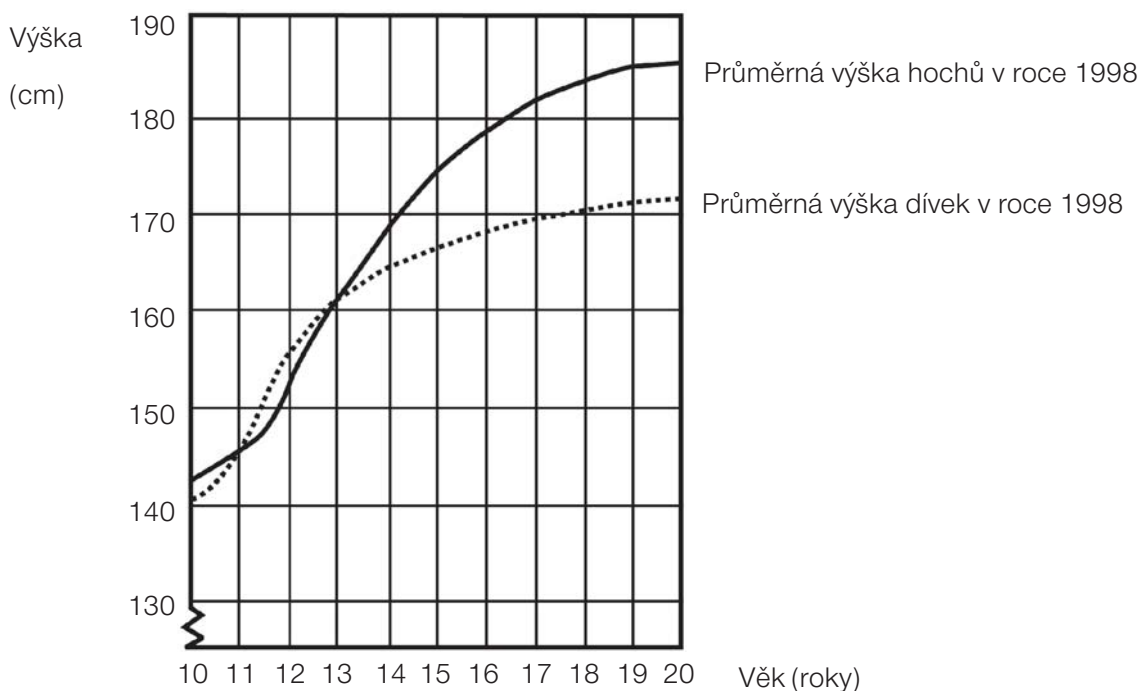
Nevyhovující odpověď

Kód 00: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	3	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	11,1 %	10,6 %	25,8 %	20,1 %	32,4 %

ÚLOHA 2: VÝŠKA LIDÍ**MLADÍ DORŮSTAJÍ VĚTŠÍ VÝŠKY**

V grafu je zaznamenána průměrná výška mladých hochů a dívek v Nizozemsku v roce 1998.

**Otázka 2.1: Výška lidí**

Tematický okruh: změna a vztahy
Situace: vědecká
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: uzavřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 2
Obtížnost: 477

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	74,8 %	73,6 %	75,9 %
OECD	67,0 %	65,4 %	68,6 %

Od roku 1980 se průměrná výška dvacetiletých dívek zvětšila o 2,3 cm na 170,6 cm. Jaká byla průměrná výška dvacetiletých dívek v roce 1980?

Odpověď: cm

Hodnocení otázky 2.1**Úplná odpověď**

Kód 1: 168,3 cm (jednotky již uvedeny)

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	74,8 %	16,8 %	8,4 %

Otázka 2.2: Výška lidí

Tematický okruh: změna a vztahy
Situace: vědecká
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 4
Obtížnost: 574

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	34,0 %	33,9 %	34,1 %
OECD	44,8 %	45,1 %	44,4 %

Vysvětli, jak je v grafu zachyceno, že po dovršení 12 let věku rychlost růstu dívek v průměru klesá.

Hodnocení otázky 2.2

Úplná odpověď

Rozhodující je, že odpověď by se měla vztahovat ke „změně“ gradientu u grafu pro dívky. Může to být vyjádřeno přímo nebo nepřímo. Kód 11 a Kód 12 jsou určeny pro přímé vyjádření o strmosti křivky v grafu, zatímco Kód 13 postihuje nepřímé porovnání užívající konkrétní hodnotu výšky před a po dovršení 12 let věku.

Kód 11: Zmiňuje snížení strmosti křivky od 12 let věku, používá běžný jazyk, ne jazyk matematický.

- Dále již nejde přímo vzhůru, narovná se.
- Křivka se vyrovnává.
- Je to plošší (rovnější) po 12.
- Čára pro dívky se začíná vyrovnávat a čára chlapců se právě zvětšuje.
- Narovná se a graf chlapců zůstává strmý.

Kód 12: Zmiňuje snížení strmosti křivky od 12 let věku, používá matematický jazyk.

- Můžete vidět, že gradient je menší.
- Míra změny grafu klesá od 12 let dále.
- [Žák počítal úhly křivky s osou x před a po 12 letech.]

Obecně, jestliže jsou použita slova jako „gradient“, „sklon“ nebo „míra změny“, považujte to za užití matematického jazyka.

Kód 13: Porovnání aktuální výšky (porovnání může být nepřímé).

- Od 10 do 12 je nárůst asi 15 cm, ale od 12 do 20 je nárůst pouze asi 17 cm.
- Průměrný růstový poměr od 10 do 12 je asi 7,5 cm za rok, ale přibližně 2 cm za rok od 12 do 20 let.

Nevyhovující odpověď

Kód 01: Žák uvádí, že výška dívek klesá pod výšku chlapců, ale NEZMIŇUJE strmost grafu dívek nebo porovnání růstového poměru dívek před a po 12 letech.

- Čára dívek klesá pod čáru chlapců.

Jestliže žák uvádí, že graf dívek se stává méně strmý A SOUČASNĚ že graf dívek klesá pod graf chlapců, měla by být odpověď hodnocena jako správná (Kód 11, 12 nebo 13). Nehledáme porovnání grafů chlapců a dívek, takže jakékoli zmínky tohoto srovnání ignorujte a rozhodnutí udělejte na základě zbytku odpovědi.

Kód 02: Jiné nesprávné odpovědi. Např. odpověď neuvádí charakteristiky grafu, přestože se jasně ptá: jak je v GRAFU zachyceno ...

- Dívky dospívají dříve.
- Protože dívky procházejí pubertou dříve než chlapci a k nárůstu jejich výšky dochází dříve.
- Dívky moc nerostou po 12. [Tvrdí, že růst dívek se snižuje po 12. roce věku, a nezmiňuje souvislost s grafem.]

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	34,0 %	36,5 %	29,5 %

Otázka 2.3: Výška lidí

Tematický okruh: změna a vztahy

Situace: vědecká

Třída kompetencí: reprodukce

Formát otázky: uzavřená s tvorbou odpovědi

Způsobnost: úroveň 1 (částečná odpověď)

úroveň 3 (úplná odpověď)

Obtížnost: 420 (částečná odpověď), 525 (úplná odpověď)

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	66,6 %	65,6 %	67,6 %
OECD	68,8 %	70,0 %	67,6 %

Urči pomocí grafu, ve kterém věkovém období jsou dívky v průměru vyšší než stejně staří chlapci.

Hodnocení otázky 2.3

Úplná odpověď

Kód 21: Uvádí správný interval 11–13 let.

- Mezi věkem 11 a 13 let.
- Od 11 let do 13 let věku jsou v průměru dívky vyšší než chlapci.
- 11–13

Kód 22: Uvádí, že dívky jsou vyšší než chlapci, když je jim 11 a 12 let. (Tato odpověď je správná v běžném jazyce, protože to znamená interval od 11 do 13).

- Dívky jsou vyšší než chlapci, když jsou staré 11 a 12 let.
- 11 a 12 let staré

Částečná odpověď

Kód 11: Jiné části z (11, 12, 13) nezahrnuté do skupiny správných odpovědí.

- 12 až 13
- 12
- 13
- 11
- 11,2 až 12,8

Nevyhovující odpověď

Kód 00: Jiná odpověď

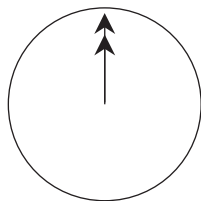
- 1998
- Dívky jsou vyšší než chlapci, když jsou starší než 13 let.
- Dívky jsou vyšší než chlapci od 10 do 11.

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	47,8 %	37,6 %	6,3 %	8,3 %

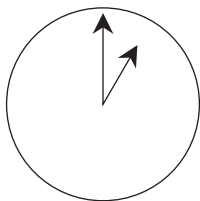
ÚLOHA 3: CHAT PO INTERNETU

Mark (ze Sydney v Austrálii) a Hans (z Berlína v Německu) spolu často komunikují pomocí „chatu“ na internetu. Aby mohli chatovat, musejí být připojeni k internetu v tutéž dobu.

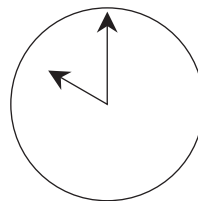
K určení vhodného času k chatování si Mark vyhledal přehled časových pásem a zjistil následující:



Greenwich 24:00 (půlnoc)



Berlín 1:00 ráno



Sydney 10:00 dopoledne

Otázka 3.1: Chat po internetu

Tematický okruh: změna a vztahy
Situace: osobní
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilost: úroveň 3
Obtížnost: 533

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	68,7 %	67,4 %	69,9 %
OECD	53,7 %	50,6 %	56,8 %

Kolik hodin je v Berlíně, když v Sydney je 19:00?

Odpověď:

Hodnocení otázky 3.1

Úplná odpověď

Kód 1: 10 hodin dopoledne NEBO 10:00

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	68,7 %	27,8 %	3,5 %

Otázka 3.2: Chat po internetu

Tematický okruh: změna a vztahy
Situace: osobní
Třída kompetencí: reflexe
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilost: úroveň 5
Obtížnost: 636

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	31,1 %	30,0 %	32,2 %
OECD	28,8 %	26,9 %	30,6 %

Mark a Hans nemohou chatovat od 9:00 do 16:30 hodin svého místního času, protože jsou ve škole. Také od 23:00 do 7:00 hodin svého místního času nemohou chatovat, protože spí.

Která doba je vhodná, aby spolu Mark a Hans chatovali? Zapiš místní časy do tabulky.

Místo	Čas
Sydney	
Berlín	

Hodnocení otázky 3.2**Úplná odpověď**

Kód 1: Každý čas nebo časový interval odpovídající 9 hodinovému časovému rozdílu v rozmezí:

Sydney: 16:30–18:00, Berlín: 7:30–9:00

NEBO

Sydney: 7:00–8:00, Berlín: 22:00–23:00

- Sydney 17:00, Berlín 8:00

POZNÁMKA: Když je uveden interval, musí celý interval vyhovovat podmínkám. Pokud také není uvedeno ráno nebo večer, ale časy lze pokládat za správné, odpověď nezpochybňujte a kódujte jako správnou.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď včetně jednoho času správně, ale odpovídajícího času nesprávně.

- Sydney 8:00, Berlín 22:00

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	31,1 %	45,5 %	23,4 %

ÚLOHA 4: NEJLEPŠÍ AUTO

Časopis pro motoristy užívá bodový systém pro hodnocení nových aut a vozu s nejvyšším hodnocením pak udělí cenu „Auto roku“. Hodnocení pěti nových aut je uvedeno v tabulce.

Auto	Bezpečnost(B)	Úspornost(U)	Exteriér(E)	Interiér(I)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Bodové hodnocení lze slovně vyjádřit takto:

3 body = vynikající

2 body = dobré

1 bod = uspokojivé

Otázka 4.1: Nejlepší auto

Tematický okruh: změna a vztahy

Situace: veřejná

Třída kompetencí: reprodukce

Formát otázky: s krátkou odpovědí

Způsobilost: úroveň 2

Obtížnost: 447

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	74,9%	76,6%	73,4%
OECD	72,9%	74,5%	71,3%

Časopis používá pro výpočet celkového hodnocení auta následující vzorec, který je váženým součtem dílčích bodových hodnocení:

$$\text{celkové hodnocení} = (3 \cdot B) + U + E + I$$

Vypočti celkové hodnocení auta „Ca“. Svoji odpověď zapiš níže.

Celkové hodnocení „Ca“:

Hodnocení otázky 4.1

Úplná odpověď

Kód 1: 15 bodů

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	74,9%	12,2%	12,8%

Otázka 4.2: Nejlepší auto**Tematický okruh:** *změna a vztahy***Situace:** *veřejná***Třída kompetencí:** *reflexe***Formát otázky:** *otevřená s tvorbou odpovědi***Způsobilost:** *úroveň 5***Obtížnost:** *657*

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	22,3 %	17,8 %	26,5 %
OECD	25,4 %	22,1 %	28,7 %

Výrobce aut „Ca“ nesouhlasí se způsobem, jak se určuje celkové hodnocení.

Napiš vzorec pro výpočet celkového hodnocení, podle něhož by auto „Ca“ zvítězilo.

Tvůj vzorec by měl obsahovat všechny čtyři proměnné. Doplň kladná čísla do prázdných úseků v následující rovnici:

celkové hodnocení = B + U + E + I

Hodnocení otázky 4.2**Úplná odpověď**

Kód 1: Správný vzorec, podle kterého zvítězí auto „Ca“.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	22,3 %	55,1 %	22,6 %

6. ÚLOHY POUŽITÉ V HLAVNÍM ŠETŘENÍ – NEURČITOST

V této kapitole uvádíme osm úloh zařazených do tematického okruhu neurčitost. Téměř všechny úlohy v této kapitole obsahují jen jednu otázku, která může být uvedena textem nebo obrázkem. U každé otázky uvádíme její základní klasifikaci (typ situace, třídu kompetencí, typ otázky) a obtížnost vyjádřenou jednak bodovým skórem na dílčí matematické škále pro tento okruh, jednak úrovní způsobilosti, do níž byla otázka zařazena.

Pro lepší představu o tom, jak obtížné byly jednotlivé otázky pro naše žáky, uvádíme u každé otázky průměrnou úspěšnost našich žáků a pro srovnání též průměrnou úspěšnost žáků zemí OECD. Za každou otázkou následuje návod na vyhodnocování žákovských odpovědí a četnost odpovědí českých žáků v procentech.

ÚLOHA 1: LOUPEŽE

Otázka 1.1: Loupeže

Tematický okruh: neurčitost

Situace: veřejná

Třída kompetencí: integrace

Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi

Způsobilost: úroveň 4 (částečná odpověď)

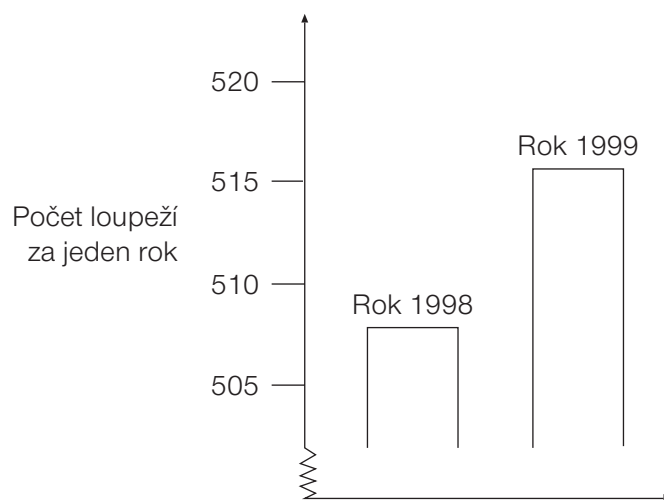
úroveň 6 (úplná odpověď)

Obtížnost: 577 (částečná odpověď), 694 (úplná odpověď)

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	20,6 %	17,9 %	23,3 %
OECD	29,5 %	28,2 %	30,8 %

Televizní reportér ukázal tento graf a řekl:

„Z grafu je patrný prudký nárůst počtu loupeží v roce 1999 oproti roku 1998.“



Považuješ reportérovo tvrzení za odpovídající vysvětlení grafu? Zdůvodni svou odpověď.

Hodnocení otázky 1.1

[Poznámka: NE v těchto kódech zahrnuje všechna tvrzení vyjadřující, že interpretace grafu NENÍ odpovídající. ANO zahrnuje všechna tvrzení vyjadřující, že interpretace je odpovídající. Hodnoťte, prosím, zda žákova odpověď vyjadřuje, že interpretace grafu je odpovídající, nebo není odpovídající. Slova „ANO“ nebo „NE“ nepovažujte za kritérium pro jednotlivé kódy.]

Úplná odpověď

Kód 21: Ne, není odpovídající. Je založeno na skutečnosti, že je vidět jen malá část grafu.

- Není odpovídající. Měl by být uveden celý graf.
- Nemyslím, že je to odpovídající interpretace grafu. Kdyby byl vidět celý graf, bylo by vidět, že je jen malý nárůst loupeží.
- Ne, protože použil pouze vrchol grafu a když vezmete v úvahu celý graf pro 0–520, nemůže být navýšení tak velké.
- Ne, protože graf sice budí dojem, že jde o velké navýšení, ale podívejte se na čísla a nejde o velké navýšení.

Kód 22: Ne, není odpovídající. Odpověď obsahuje správné argumenty, používány jsou pojmy poměrný nebo procentový růst.

- Ne, není odpovídající. 10 není prudký růst ve srovnání s celkovým počtem 500.
- Ne, není odpovídající. Vyjádřeno v procentech, růst představuje pouze asi 2 %.
- Ne. Osm loupeží navíc je 1,5% nárůst. Podle mého názoru to není mnoho!
- Ne, pouze o 8 nebo 9 více za tento rok. V porovnání s 507 to není velké číslo.

Kód 23: Je požadován trend v datech, aby bylo možné tvrzení posoudit.

- Nemůžeme říci, zda je nárůst prudký nebo není. Jestliže v roce 1997 byl počet loupeží stejný jako v roce 1998, pak bychom mohli říci, že v roce 1999 je nárůst velký.
- Neexistuje způsob, jak zjistit, jak je „prudký“, protože potřebujete alespoň dvě změny pro považování nárůstu za velký a za malý.

Částečná odpověď

Kód 11: Ne, není odpovídající, ale vysvětlení neobsahuje podrobnosti. Odpověď se soustřeďuje JENOM na růst daný absolutním počtem loupeží, ale neporovnává s celkem.

- Není odpovídající. Loupeže vzrostly o 10. Slovo „prudký“ nevyjadřuje správně skutečný nárůst loupeží. Nárůst byl pouze o 10, a to se nedá nazvat „prudkým“.
- Z 508 na 515 není velké navýšení.
- Ne, protože 8 nebo 9 není mnoho.
- Více méně. Z 507 na 515 je nárůst, ale není prudký.

[Jelikož měřítko grafu není příliš jasné, akceptujte pro růst absolutního počtu loupeží hodnoty mezi 5 a 15.]

Kód 12: Ne, není odpovídající, správná metoda, ale drobné početní chyby.

- Správná metoda a závěr, ale vypočtené procento je 0,03 %.

Nevyhovující odpověď

Kód 01: Ne bez vysvětlení, s nedostatečným nebo nesprávným vysvětlením.

- Ne, nesouhlasím.
- Reportér by neměl používat slovo „prudký“.
- Ne, není odpovídající. Reportéři vždy rádi přehánějí.



Kód 02: Ano, zaměřuje se na vzhled grafu.

- Ano, graf zdvojnásobil svoji výšku.
- Ano, počet loupeží je téměř dvojnásobný.

Kód 03: Ano bez vysvětlení nebo s jiným vysvětlením než pro Kód 02.

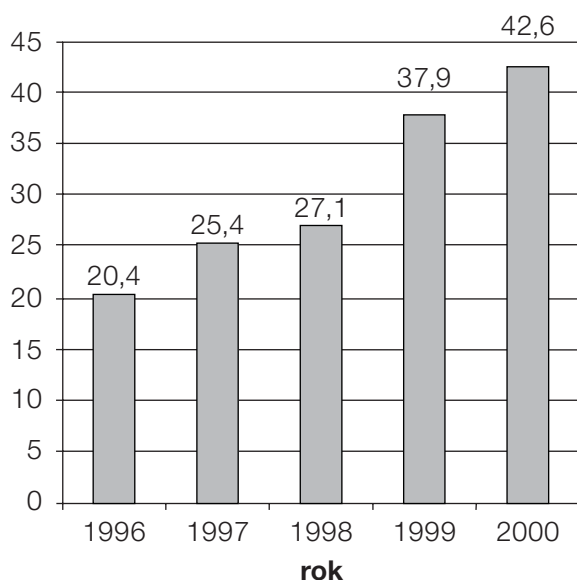
Kód 04: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	8,9 %	23,3 %	50,1 %	17,7 %

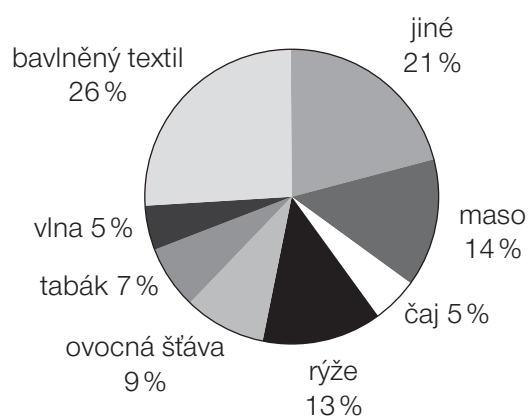
ÚLOHA 2: VÝVOZ

Následující grafy uvádějí informace o vývozu ze Zedlandie, kde se jako měna užívají zedy.

**Celkový roční vývoz ze Zedlandie
v milionech zedů, 1996–2000**



**Rozložení vývozu ze Zedlandie
v roce 2000**



Otázka 2.1: Vývoz

Tematický okruh: neurčitost
Situace: veřejná
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: uzavřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 2
Obtížnost: 427

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	81,5 %	80,3 %	82,8 %
OECD	78,7 %	79,0 %	78,4 %

Kolik činila celková hodnota (v milionech zedů) vývozu ze Zedlandie v roce 1998?

Odpověď:

Hodnocení otázky 2.1

Úplná odpověď

Kód 1: 27,1 milionu zedů nebo 27 100 000 zedů nebo 27,1 (jednotky nejsou požadovány). Akceptujte také zaokrouhlení na 27.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	81,5 %	9,1 %	9,3 %

Otázka 2.2: Vývoz

Tematický okruh: neurčitost
Situace: veřejná
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: s výběrem odpovědi
Způsobilost: úroveň 4
Obtížnost: 565

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	59,9 %	57,3 %	62,4 %
OECD	48,3 %	44,5 %	52,2 %

Jaká byla hodnota ovocné šťávy vyvezené ze Zedlandie v roce 2000?

- A 1,8 milionu zedů
- B 2,3 milionu zedů
- C 2,4 milionu zedů
- D 3,4 milionu zedů
- E 3,8 milionu zedů

Hodnocení otázky 2.2

Úplná odpověď

Kód 1: E 3,8 milionu zedů

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků						
Kód odpovědi	A	B	C	D	E	Bez odpovědi
Četnost	7,2 %	6,0 %	13,8 %	6,9 %	59,9 %	6,2 %

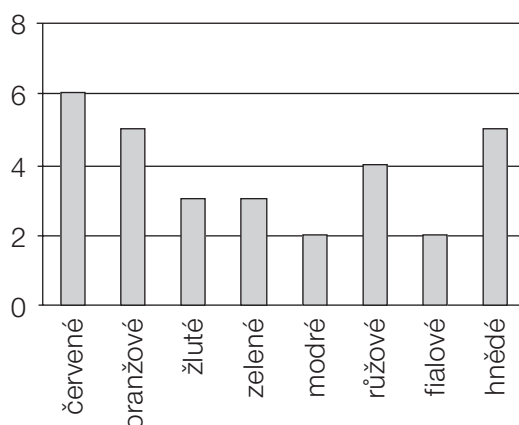
ÚLOHA 3: BAREVNÉ BONBONY

Otázka 3.1: Barevné bonbony

Tematický okruh: neurčitost
Situace: osobní
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: s výběrem odpovědi
Způsobilost: úroveň 4
Obtížnost: 549

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	46,0 %	41,8 %	50,0 %
OECD	50,2 %	45,8 %	54,5 %

Maminka dovolila Rudlovi, aby si ze sáčku vzal jeden bonbon. Rudla do sáčku nevidí. Počet bonbonů jednotlivých barev v sáčku udává graf.



Jaká je pravděpodobnost, že si Rudla vezme červený bonbon?

- A 10 %
- B 20 %
- C 25 %
- D 50 %

Hodnocení otázky 3.1

Úplná odpověď

Kód 1: B 20 %

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	A	B	C	D	Bez odpovědi
Četnost	11,2 %	46,0 %	27,0 %	15,0 %	0,8 %

ÚLOHA 4: TEST Z FYZIKY

Otázka 4.1: Test z fyziky

Tematický okruh: neurčitost
Situace: vzdělávací
Třída kompetencí: reprodukce
Formát otázky: s krátkou odpovědí
Způsobilst: úroveň 4
Obtížnost: 556

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	43,7 %	40,4 %	46,7 %
OECD	46,8 %	44,6 %	48,9 %

Učitel fyziky v Martině škole dává písémky, za každou lze dostat 100 bodů. Marta má z prvních čtyř písemek z fyziky průměr 60 bodů. Za pátou písemku dostala 80 bodů.

Jaký bude mít Marta průměr bodů ze všech pěti písemek z fyziky?

Průměr:

Hodnocení otázky 4.1

Úplná odpověď

Kód 1: 64

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	43,7 %	35,1 %	21,2 %

ÚLOHA 5: ODPADKY

Otázka 5.1: Odpadky

Tematický okruh: neurčitost
Situace: vědecká
Třída kompetencí: reflexe
Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 4
Obtížnost: 551

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	42,3 %	45,5 %	39,1 %
OECD	51,5 %	53,0 %	50,1 %

Žáci dostali za domácí úkol z ekologie zjistit informace o době rozkladu některých druhů odpadků, které lidé odhazují:

Druh odpadků	Doba rozkladu
slupky od banánů	1–3 roky
slupky od pomerančů	1–3 roky
papírové krabičky	0,5 roku
žvýkačky	20–25 roků
noviny	několik dní
umělohmotné kelímky	přes 100 let

Žák chce výsledky znázornit pomocí sloupkového diagramu.

Uveď **jeden** důvod, proč je sloupkový diagram pro znázornění těchto dat nevhodný.

Hodnocení otázky 5.1

Úplná odpověď

Kód 1: Důvod poukazující na velké rozdíly v datech.

- Rozdíly ve výšce sloupců by byly příliš velké.
- Když pro umělou hmotu uděláme sloupec vysoký 10 cm, pak bude pro papírové krabičky jen 0,05 cm.

NEBO

Důvod poukazující na neurčitost dat u některých druhů.

- Výška sloupce pro „umělohmotné kelímky“ není určena.
- Nelze udělat jeden sloupec pro 1–3 roky nebo pro 20–25 let.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

- Protože by to nefungovalo.
- Piktogram je lepší.
- Informace nelze ověřit.
- Protože čísla v tabulce jsou pouze přibližná.

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	42,3 %	37,4 %	20,3 %

ÚLOHA 6: ZEMĚTŘESENÍ

Otázka 6.1: Zemětřesení

Tematický okruh: neurčitost
Situace: vědecká
Třída kompetencí: reflexe
Formát otázky: s výběrem odpovědi
Způsobilst: úroveň 4
Obtížnost: 557

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	36,0 %	37,0 %	35,0 %
OECD	46,5 %	47,0 %	46,0 %

V dokumentárním pořadu o zemětřesení se mluvilo o tom, jak často k zemětřesením dochází, a o možnostech jejich předvídání.

Jeden geolog prohlásil: „Pravděpodobnost, že v příštích dvaceti letech bude město Zed postiženo zemětřesením, je dvě ku třem.“

Které z následujících vyjádření nejlépe odpovídá tvrzení geologa?

- A $\frac{2}{3} \cdot 20 = 13,3$, takže ode dneška za 13 až 14 let dojde ve městě Zed k zemětřesení.
- B $\frac{2}{3}$ je větší než $\frac{1}{2}$, takže si můžeme být jisti, že někdy během příštích 20 let dojde ve městě Zed k zemětřesení.
- C Pravděpodobnost, že ve městě Zed dojde někdy během příštích 20 let k zemětřesení, je větší než pravděpodobnost, že k němu nedojde.
- D Nemůžeme říci, jak to bude, protože si nikdo nemůže být jist, kdy k zemětřesení dojde.

Hodnocení otázky 6.1

Úplná odpověď

Kód 1: C Pravděpodobnost, že ve městě Zed dojde někdy během příštích 20 let k zemětřesení, je větší než pravděpodobnost, že k němu nedojde.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků					
Kód odpovědi	A	B	C	D	Bez odpovědi
Četnost	9,3 %	11,2 %	36,0 %	36,4 %	7,1 %

ÚLOHA 7: VÝSLEDKY TESTU

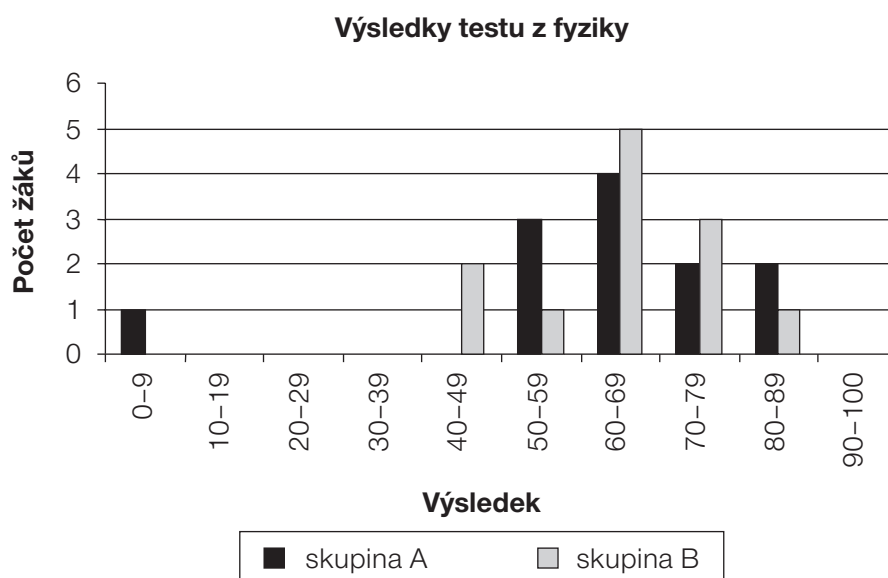
Otázka 7.1: Výsledky testu

Tematický okruh: neurčitost
Situace: vzdělávací
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 5
Obtížnost: 620

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	19,8 %	18,2 %	21,3 %
OECD	35,0 %	32,2 %	32,0 %

Diagram zachycuje výsledky testu z fyziky u dvou skupin označených A a B.

Průměrný výsledek ve skupině A je 62,0 bodů a ve skupině B je 64,5 bodu. K úspěšnému absolvování testu je zapotřebí získat alespoň 50 bodů.



Učitel si prohlédl diagram a došel k závěru, že skupina B obstála v tomto testu lépe než skupina A.

Žáci ze skupiny A s učitelem nesouhlasí. Snaží se učitele přesvědčit, že není tak jisté, že skupina B je lepší.

Uveď jeden matematický důvod, který by žáci ze skupiny A mohli použít. Vycházej přitom z diagramu.

Hodnocení otázky 7.1

Úplná odpověď

Kód 1: Je uveden jeden správný argument. Správné argumenty se mohou vztahovat k počtu žáků, kteří uspěli, k neúměrnému vlivu neúspěšného žáka nebo k počtu žáků s nejlepším výsledkem.

- Ze skupiny A obstálo v testu více žáků než ze skupiny B.
- Když odhlédneme od nejslabšího žáka ze skupiny A, byli žáci ze skupiny A lepší než ze skupiny B.
- Více žáků ze skupiny A než ze skupiny B dosáhlo alespoň 80 bodů.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiné odpovědi včetně odpovědí s důvody nematematickými nebo s důvody matematicky chybnými nebo odpovědi, které pouze popisují rozdíly, ale nezdůvodňují, že skupina B nemusí být lepší.

- Ve fyzice je skupina A zpravidla lepší než skupina B. Tento test je jen náhoda.
- Protože rozdíl mezi nejlepším a nejhorším výsledkem je ve skupině B menší než ve skupině A.
- Skupina A má více žáků s počtem bodů v rozmezí 80–89 a 50–59.
- Skupina A má větší rozpětí mezi kvartily než skupina B.

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	19,8 %	34,7 %	45,5 %

ÚLOHA 8: PREZIDENTSKÉ VOLBY

Otázka 8.1: Prezidentské volby

Tematický okruh: neurčitost
Situace: veřejná
Třída kompetencí: integrace
Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi
Způsobilost: úroveň 5
Obtížnost: 615

Průměrná úspěšnost	Celkem	Dívky	Chlapci
ČR	35,3 %	34,7 %	35,8 %
OECD	35,7 %	35,5 %	35,8 %

V Zedlandii byly před prezidentskými volbami prováděny průzkumy, které zjišťovaly voličskou podporu stávajícího prezidenta. Čtvery noviny provedly nezávislé průzkumy. Zde jsou jejich výsledky:

1. noviny: 36,5 % (průzkum byl proveden 6. ledna na 500 náhodně vybraných občanech s volebním právem),
2. noviny: 41,0 % (průzkum byl proveden 20. ledna na 500 náhodně vybraných občanech s volebním právem),
3. noviny: 39,0 % (průzkum byl proveden 20. ledna na 1000 náhodně vybraných občanech s volebním právem),
4. noviny: 44,5 % (průzkum byl proveden 20. ledna na 1000 čtenářích, kteří volali do redakce).

Který z uvedených průzkumů asi nejlépe předpovídá šance prezidenta ve volbách, které se budou konat 25. ledna? Uveď dva důvody pro vysvětlení své odpovědi.

Hodnocení otázky 8.1

Úplná odpověď

Kód 2: 3. noviny. Průzkum je aktuálnější, provedený na větším vzorku, náhodně vybraný vzorek, dotazování byli jen voliči. (Požadujeme aspoň dva důvody). Další informace včetně irelevantních nebo nesprávných ignorujeme.

- 3. noviny, protože vybraly náhodně více občanů s volebním právem.
- 3. noviny, protože se dotazovaly 1000 lidí náhodně vybraných a datum bylo bližší dnu voleb, takže voliči mají méně času změnit svůj názor.
- 3. noviny, protože byli náhodně vybráni a měli volební právo.
- 3. noviny, protože zkoumaly více lidí kratší dobu před volbami.
- 3. noviny, protože 1000 lidí bylo vybráno náhodně.

Částečná odpověď

Kód 1: 3. noviny jen s jedním důvodem nebo bez zdůvodnění.

- 3. noviny, protože výzkum byl blíž k datu voleb.
- 3. noviny, protože zkoumaly více lidí než 1. noviny a 2. noviny.
- 3. noviny

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

- 4. noviny. Více lidí dá přesnější výsledky a lidé volající do redakce mají svůj názor lépe promyšlený.

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	35,3 %	10,2 %	37,1 %	17,4 %

7. ÚLOHY Z PILOTÁŽE

V této kapitole uvádíme pět úloh, které byly navrženy pro testování žáků v oblasti matematické gramotnosti, byly pilotovány v roce 2002 ve všech zúčastněných zemích, ale z nejrůznějších důvodů nebyly zařazeny do souboru úloh pro hlavní šetření výzkumu PISA v roce 2003.

U každé otázky uvádíme její základní klasifikaci – tematický okruh, typ situace, třídu kompetencí a typ otázky. Protože úlohy nebyly zadávány v hlavním šetření, nejsou k dispozici údaje o obtížnosti ani mezinárodní výsledky. Za každou otázkou následuje návod na vyhodnocování žákovských odpovědí a četnost odpovědí českých žáků v procentech. Na rozdíl od úloh z hlavního šetření nejsou tyto výsledky reprezentativní za celou populaci patnáctiletých žáků.

ÚLOHA 1: MATĚJSKÁ POUŤ

Otázka 1.1: Matějská pouť

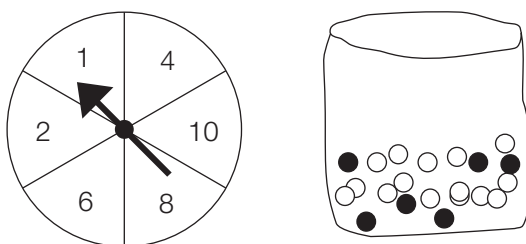
Tematický okruh: neurčitost

Situace: vzdělávací

Třída kompetencí: integrace

Formát otázky: s výběrem odpovědi

V jednom stánku na Matějské pouti je možné roztočit kolo štěstí. **Když** se ručička zastaví na sudém čísle, hráč si může vytáhnout kuličku z pytlíku. Kolo štěstí a pytlík s kuličkami jsou na obrázku.



Cenu vyhraje ten, kdo si vytáhne černou kuličku. Zuzka si také jednou zahraje tuto hru.

S jakou pravděpodobností Zuzka vyhraje cenu?

- A Je to nemožné.
- B Není to příliš pravděpodobné.
- C Asi s 50% pravděpodobností.
- D Je to velmi pravděpodobné.
- E Určitě vyhraje.

Hodnocení otázky 1.1

Úplná odpověď

Kód 1: B Není to příliš pravděpodobné.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků						
Kód odpovědi	A	B	C	D	E	Bez odpovědi
Četnost	9,2 %	44,0 %	34,4 %	8,3 %	1,8 %	2,3 %

ÚLOHA 2: DĚTSKÉ BOTY

V tabulce je uvedeno zedlandské číslování velikostí bot a příslušná délka chodidla:



Od (mm)	Do (mm)	Velikost bot
107	115	18
116	122	19
123	128	20
129	134	21
135	139	22
140	146	23
147	152	24
153	159	25
160	166	26
167	172	27
173	179	28
180	186	29
187	192	30
193	199	31
200	206	32
207	212	33
213	219	34
220	226	35

Tabulka velikostí bot v Zedlandii

Otázka 2.1: Dětské boty

Tematický okruh: změna a vztahy

Situace: osobní

Třída kompetencí: reprodukce

Formát otázky: uzavřená s tvorbou odpovědi

Maruška má chodidlo dlouhé 163 mm. Urči podle tabulky zedlandskou velikost bot, které by si měla zkusit.

Odpověď:

Hodnocení otázky 2.1

Úplná odpověď

Kód 1: 26

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	90,8 %	4,8 %	4,4 %

ÚLOHA 3: TURNAJ VE STOLNÍM TENISE



Otázka 3.1: Turnaj ve stolním tenise

Tematický okruh: neurčitost

Situace: osobní

Třída kompetencí: reprodukce

Formát otázky: uzavřená s tvorbou odpovědi

Tomáš, Rudla, Bohouš a David vytvořili v oddíle stolního tenisu tréninkovou čtveřici. Chtějí si každý s každým jednou zahrát. Pro své zápasy si rezervovali dva tréninkové stoly.

Doplň následující rozpis zápasů – dopiš jména hráčů ve všech zápasech.

	1. tréninkový stůl	2. tréninkový stůl
1. kolo	Tomáš – Rudla	Bohouš – David
2. kolo	 –	 –
3. kolo	 –	 –

Hodnocení otázky 3.1

Úplná odpověď

Kód 1: Čtyři zbývající zápasy správně rozepsány a nasazeny do 2. a 3. kola.

- Např.

	1. tréninkový stůl	2. tréninkový stůl
1. kolo	Tomáš – Rudla	Bohouš – David
2. kolo	Tomáš – Bohouš	Rudla – David
3. kolo	Tomáš – David	Rudla – Bohouš

Nevyhovující odpověď

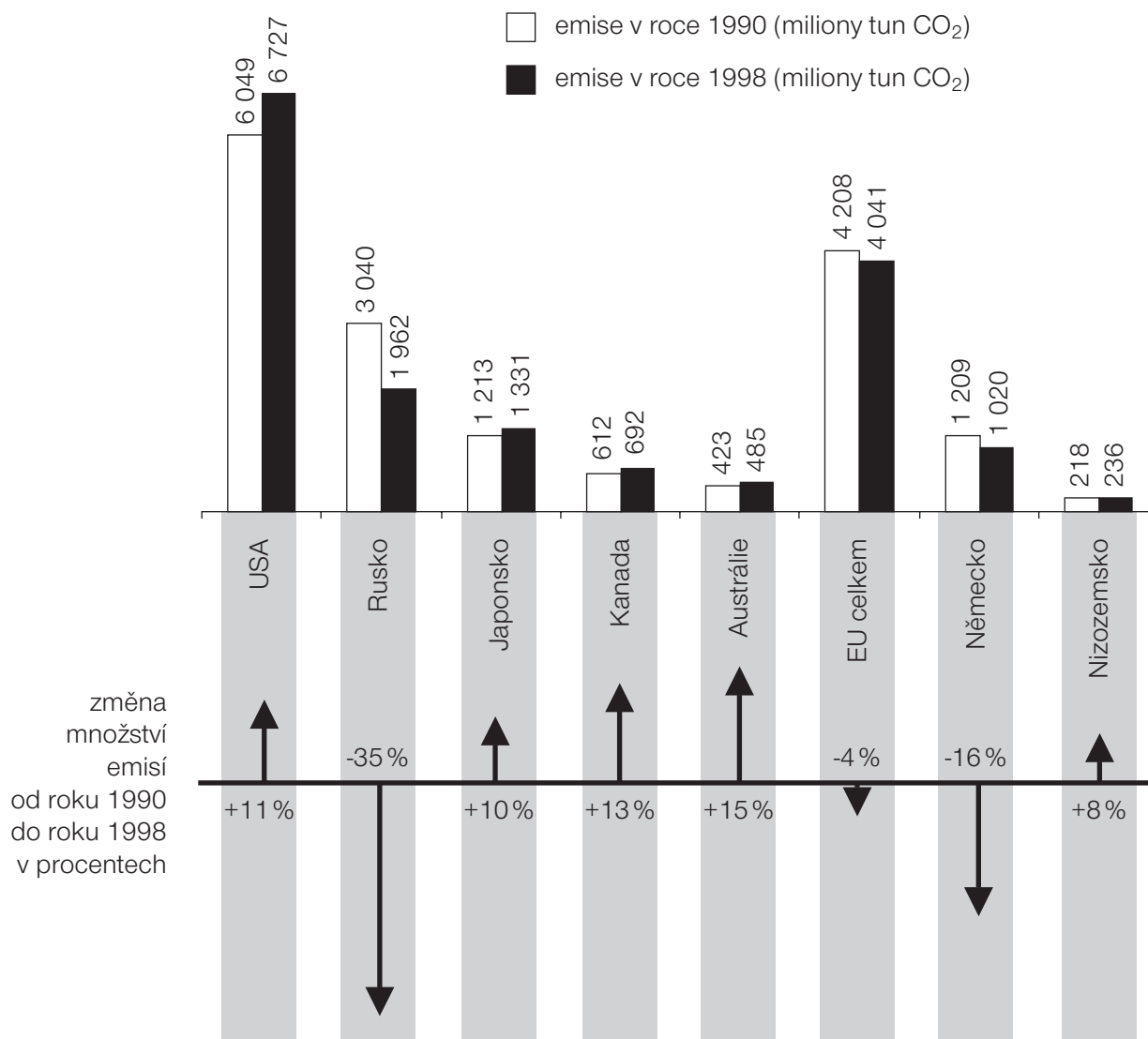
Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	77,4 %	19,7 %	2,9 %

ÚLOHA 4: SNIŽOVÁNÍ MNOŽSTVÍ CO₂

Mnoho vědců se obává, že zvyšující se množství CO₂ v naší atmosféře způsobuje změnu podnebí.

Diagram udává množství emisí CO₂ v roce 1990 (světlé sloupce) v některých zemích (nebo oblastech), množství emisí v roce 1998 (tmavé sloupce) a změnu množství emisí od roku 1990 do roku 1998 v procentech (šipky s procenty).



Otázka 4.1: Snižování množství CO₂

Tematický okruh: kvantita

Situace: vědecká

Třída kompetencí: integrace

Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi

Z diagramu můžeme vyčíst, že nárůst emisí CO₂ od roku 1990 do roku 1998 činil v USA 11 %.

Provedením výpočtu ukaž, jak se došlo k uvedeným 11 %.

Hodnocení otázky 4.1

Úplná odpověď

Kód 2: Správně odečteno a správný výpočet procent.

- $6727 - 6049 = 678, \frac{678}{6049} \cdot 100 \% \approx 11 \%$.

Částečná odpověď

Kód 1: Chyba v odčítání a správný výpočet procent, nebo správně odečteno, ale děleno 6727.

- $\frac{6049}{6727} \cdot 100 = 89,9\%$ a $100 - 89,9 = 10,1\%$

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiné odpovědi včetně pouhého „Ano“ nebo „Ne“.

- Ano, je to 11 %.

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	23,3 %	10,2 %	18,6 %	47,9 %

Otázka 4.2: Snižování množství CO₂

Tematický okruh: kvantita

Situace: vědecká

Třída kompetencí: integrace

Formát otázky: otevřená s tvorbou odpovědi

Marta prozkoumala diagram a prohlásila, že objevila chybu v procentech u údajů o změně množství emisí: „Procento poklesu v Německu (16 %) je větší než procento poklesu v celé Evropské unii (EU celkem 4 %). To není možné, protože Německo je součástí EU.“

Souhlasíš s Martou, když tvrdí, že to není možné? Odůvodni svou odpověď.

Hodnocení otázky 4.2

Úplná odpověď

Kód 1: „Ne“ se správnou argumentací.

- Ne, jiné země z EU mohou mít vzrůst, např. Nizozemsko, takže celkový pokles v EU může být menší než v Německu.

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků			
Kód odpovědi	1	0	Bez odpovědi
Četnost	27,9 %	28,4 %	43,7 %

Otázka 4.3: Snižování množství CO₂**Tematický okruh:** *kvantita***Situace:** *vědecká***Třída kompetencí:** *reflexe***Formát otázky:** *otevřená s tvorbou odpovědi*

Marta a Karel se přeli, která země (nebo oblast) zaznamenala největší **vzrůst** emisí CO₂.

Na základě diagramu došel každý k jinému závěru.

Uveď dvě možné „správné“ odpovědi na tuto otázku a odůvodni každou z nich.

Hodnocení otázky 4.3**Úplná odpověď**

Kód 2: V odpovědi lze nalézt oba matematické přístupy (největší absolutní vzrůst a největší relativní vzrůst) a uvedeny jsou USA a Austrálie.

- USA má největší vzrůst v milionech tun a Austrálie má největší vzrůst v procentech.

Částečná odpověď

Kód 1: V odpovědích lze nalézt oba matematické přístupy (největší absolutní vzrůst a největší relativní vzrůst), země však nejsou uvedeny nebo jsou uvedeny chybně.

- Rusko mělo největší vzrůst množství CO₂ (1 078 tun), ale Austrálie měla největší procentuální vzrůst (15%).

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	16,7 %	3,3 %	29,3 %	50,7 %

ÚLOHA 5: KOSMICKÝ LET

Kosmická stanice Mir byla na oběžné dráze 15 let a za tu dobu obletěla Zemi asi 86 500krát. Nejdelší pobyt jednoho kosmonauta na Miru trval přibližně 680 dní.

Otázka 5.1: Kosmický let

Tematický okruh: *kvantita*

Situace: *vědecká*

Třída kompetencí: *integrace*

Formát otázky: *otevřená s tvorbou odpovědi*

Mir obíhal Zemi ve výšce asi 400 kilometrů. Průměr Země je přibližně 12 700 km a její obvod měří přibližně 40 000 km ($\pi \cdot 12\,700$).

Odhadni celkovou vzdálenost, kterou Mir urazil při svých 86 500 obězích. Odpověď zaokrouhli na desítky milionů.

Hodnocení otázky 5.1

Úplná odpověď

Kód 2: Odpověď v rozmezí 3 600 až 3 800 milionů kilometrů, zaokrouhleno na desítky milionů.

- průměr Země $\approx 12\,700$
průměr oběžné dráhy Miru $\approx 13\,500$
délka jednoho oběhu $\approx 42\,000$
Celkem 3 630 milionů kilometrů.
- Délka jednoho oběhu je $40\,000 + 2\pi \cdot 400 = 42\,513$ km
Celkem 3 677,4 milionů km, odpověď je tedy 3 680 milionů km.

Částečná odpověď

Kód 1: Jedna chyba v postupu

- Byl užit poloměr místo průměru.
- Průměr oběžné dráhy Miru byl získán přičtením 400 místo 800.
- Nezaokrouhleno tak, jak požadováno (např. zaokrouhleno na miliony a ne na desítky milionů).

Nevyhovující odpověď

Kód 0: Jiná odpověď

Odpovědi českých žáků				
Kód odpovědi	2	1	0	Bez odpovědi
Četnost	8,1 %	6,6 %	40,1 %	45,2 %



LITERATURA:

Kramplová, I. a kol. *Netradiční úlohy aneb čteme s porozuměním*. Praha: ÚIV, 2002.

OECD. *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. Paris: OECD, 2003.

OECD. *Learning for Tomorrow's World: First Results from PISA 2003*. Paris: OECD, 2004.

OECD. *Problem Solving for Tomorrow's World: First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003*. Paris: OECD, 2004.

Palečková, J., Mandíková, D. *Netradiční přírodovědné úlohy*. Praha: ÚIV, 2003.

Palečková, J., Tomášek, V. *Učení pro zítřek: Výsledky výzkumu OECD PISA 2003*. Praha: ÚIV, 2005.

Straková, J. a kol. *Vědomosti a dovednosti pro život: Čtenářská, matematická a přírodovědná gramotnost patnáctiletých žáků v zemích OECD*. Praha: ÚIV, 2002.

Tomášek, V., Potužníková, E. *Netradiční úlohy: Problémové úlohy mezinárodního výzkumu PISA*. Praha: ÚIV, 2004.

ÚIV – Oddělení mezinárodních výzkumů. *Měření vědomostí a dovedností: Nová koncepce hodnocení žáků*. Překlad. Praha: ÚIV, 1999.

ÚIV – Oddělení mezinárodních výzkumů. *Úlohy pro měření čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti*. Praha: ÚIV, 2000.

ÚIV – Sekce měření výsledků vzdělávání. *Výsledky českých žáků v mezinárodních výzkumech 1995–2000*. Praha: ÚIV, 2002.

Netradiční úlohy

Matematická gramotnost v mezinárodním výzkumu PISA

Zpracovali: Michaela Frýzková, Eva Potužníková, Vladislav Tomášek

První vydání.

Vydal: Ústav pro informace ve vzdělávání – divize Nakladatelství TAURIS,

Senovážné nám. 26, Praha 1, v roce 2006 v nákladu 2000 výtisků.

Jazyková redakce: ÚIV – Divize informací a služeb.

Grafická úprava, sazba a tisk: ÚIV – divize Nakladatelství TAURIS.

www.uiv.cz

ISBN 80-211-0522-4